Concursul Interjudeţean
"Matematica, de drag"
Ediţia a IX - a, Bistriţa
21 - 23 noiembrie 2014

Barem de corectură şi notare

Clasa a IX -a

Subiectul I.

Să se determine numerele naturale a şi b astfel încât $E(a,b) = a^2 \cdot 2^{3k-2} + 9b$ să se dividă cu 7, oricare ar fi $k \geq 1$, număr natural.

Soluţie:

Cum $(4,7) = 1$, putem scrie 0.5p

$4 \cdot E(a,b) = a^2 \cdot 8^k + 36b = M_7 + a^2 + b$ 1p

de unde $E(a,b) = M_7 \Leftrightarrow a^2 + b = M_7$ 1p

Resturile împărţirii la 7 pentru $a,\ b,\ a^2$ sunt

a	0	1	2	3	4	5	6
a^2	0	1	4	2	2	4	1
b	0	1	2	3	4	5	6

.... 1p

De aici rezultă că $a^2 + b$ şi deci $E(a,b)$ se divide cu 7 pentru:

1) $a = 7k,\ b = 7p,\ k,p \in \mathbb{N}^*$ 0.5p

2) $a = 7k+2,\ b = 7p+3,\ k,p \in \mathbb{N}$ 0.5p

3) $a = 7k+5,\ b = 7p+3,\ k,p \in \mathbb{N}$ 0.5p

4) $a = 7k+3,\ b = 7p+5,\ k,p \in \mathbb{N}$ 0.5p

5) $a = 7k+4,\ b = 7p+5,\ k,p \in \mathbb{N}$ 0.5p

6) $a = 7k+1,\ b = 7p+6,\ k,p \in \mathbb{N}$ 0.5p

7) $a = 7k+6,\ b = 7p+6,\ k,p \in \mathbb{N}^*$ 0.5p

Subiectul II.

Fie triunghiul dreptunghic în A cu $AB = 3$ şi $AC = 5$ şi punctele $R,\ S \in BC$ astfel încât $\overrightarrow{BR} = \frac{2}{7}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BS} = \frac{4}{9}\overrightarrow{BC}$, apoi $P \in (AR$ şi $Q \in (AS$ astfel încât $AP = 2\sqrt{13}$ şi $AQ = 10$. Demonstraţi că $PQ \perp AB$.

Soluţie:

Considerăm $\triangle ABC$ în sistemul de axe xOy astfel încât $O \equiv A$, $(AB \equiv (Ox$ şi $(AC \equiv (Oy$.

Figura 1p

Avem: $\overrightarrow{AB} = 3\,\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{AC} = 5\,\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{BC} = -3\,\overrightarrow{i} + 5\,\overrightarrow{j}$

$\overrightarrow{BR} = -\dfrac{6}{7}\overrightarrow{i} + \dfrac{10}{7}\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{BS} = -\dfrac{12}{9}\overrightarrow{i} + \dfrac{20}{9}\overrightarrow{j}$ 1p

$\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BR} = \dfrac{15}{7}\overrightarrow{i} + \dfrac{10}{7}\overrightarrow{j}$

$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BS} = \dfrac{15}{9}\vec{i} + \dfrac{20}{9}\vec{j}$ 1p

$\overrightarrow{AP} = \alpha \cdot \overrightarrow{AR}$, cu $\mid \overrightarrow{AP} \mid = \alpha \mid \overrightarrow{AR} \mid,\ \alpha > 0$ 1p

$2\sqrt{13} = \alpha \cdot \sqrt{\dfrac{325}{49}}$, de unde $\alpha = \frac{14}{5}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AP} = \dfrac{14}{5}\overrightarrow{AR} = 6\vec{i} + 4\vec{j}$ 1p

În mod analog, avem:

$\overrightarrow{AQ} = \beta\overrightarrow{AS},\ \beta > 0,\ \mid \overrightarrow{AQ} \mid = \beta \mid \overrightarrow{AS} \mid$

$10 = \beta\frac{25}{9}$, de unde $\beta = \frac{18}{5}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AQ} = \frac{18}{5} \cdot \overrightarrow{AS} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$ 1p

În final: $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AQ} = -4\vec{j}$

de unde $\overrightarrow{QP} \parallel \overrightarrow{CA}$, adică $QP \perp AB$ 1p

Subiectul III.

Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} a \cdot [a] + c \cdot \{c\} - [b] \cdot \{b\} = 0,16 \\ 4b \cdot [b] + 4a \cdot \{a\} - 4[c] \cdot \{c\} = 1 \\ c \cdot [c] + b \cdot \{b\} - [a] \cdot \{a\} = 0,49 \end{cases}$$

unde $[x],\ \{x\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv, partea fracţionară a numărului real x.

Soluţie:

Notăm $[a] = m,\ [b] = n,\ [c] = p, \{a\} = x,\ \{b\} = y,\ \{c\} = z$.

sistemul devine:

$$\begin{cases} (m+x) \cdot m + (p+z) \cdot z - n \cdot y = 0,16 \ \ (1) \\ (n+y) \cdot n + (m+x) \cdot x - p \cdot z = 0,25 \ \ (2) \\ (p+z) \cdot p + (n+y) \cdot y - mx = 0,49 \ \ (3) \end{cases}$$ 1p

Adunând (1) cu (2), obţinem:

$n^2 + z^2 + (m+x)^2 = 0,41;\ n \in \mathbb{Z},\ 0 \leq n^2 \leq 0,41 \Rightarrow n = 0$ 1p

Adunând (1) cu (3), obţinem:

$m^2 + y^2 + (p+z)^2 = 0,65 \Rightarrow m = 0$ 1p

Adunând (2) cu (3), obţinem:

$p^2 + x^2 + (n+y)^2 = 0,74 \Rightarrow p = 0$ 1p

Acum sistemul devine: $z^2 = 0,16,\ x^2 = 0,25,\ y^2 = 0,49$ 1p

Cum $x,\ y,\ z \in [0,1)$, rezultă că $x = 0,5;\ y = 0,7\ z = 0,4$ 1p

Deci $a = 0,5; b = 0,7; c = 0,4$ .... 1p.