Concursul naţional de matematică

"LAURENŢIU PANAITOPOL"

Ediţia a VII-a, Bucureşti, 22.11.2014

Clasa a VI-a

Soluţii şi bareme

Problema 1

Se consideră mulţimea $X=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Submulţimile *A*, *B* şi *C* ale mulţimii *X* au proprietăţile:

i) $A\cup B\cup C=X$ şi

ii) $A\cap B=B\cap C=C\cap A=\varnothing$.

Arătaţi că cel puţin una dintre mulţimile *A*, *B* sau *C* are produsul elementelor sale mai mare sau egal cu 72.

Notăm cu $P(M)$ produsul numerelor din mulţimea *M*. Atunci $P(X)=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 9=362880$	**2p**
Deoarece numărul 71 este prim cu oricare element din mulţimea X, rezultă că $P(A)\neq 71$, $P(B)\neq 71$, $P(C)\neq 71$. Presupunem că $P(Y)\leq 70$ pentru oricare $Y\in\{A,B,C\}$. Atunci $P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)\leq 70^3=343000<P(X)$. Contradicţie.	**3p**
Prin urmare, cel puţin una dintre mulţimile *A*, *B* sau *C* are produsul elementelor sale mai mare decât 70 şi diferit de 71. Deci cel puţin una dintre mulţimile *A*, *B* sau *C* are produsul elementelor sale mai mare sau egal cu 72. Un exemplu ar fi partiţia $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{5,6,7\}$, $C=\{8,9\}$ în care $P(A)<P(B)<P(C)=72$.	**2p**

Problema 2

Numărul $m=\overline{abc}$ este scris cu cifre nenule distincte şi are suma cifrelor egală cu *S*.

Determinaţi valorile lui *S* pentru care suma cifrelor numărului $n=1110-\overline{abc}$ se divide cu *S*.

Avem $24\geq S=a+b+c\geq 6$.	**2p**
$n=\overline{(10-a)(10-b)(10-c)}$, deci suma cifrelor lui *n* este $6\leq 30-(a+b+c)\leq 24$	
Avem $30-(a+b+c)=k(a+b+c)$, dacă şi numai dacă $30=(k+1)(a+b+c),\ k\in\mathbb{N}^*$	**1p**
Rezultă că $S\in\{6,10,15\}$	

Problema 3

4. Se consideră un număr natural *n*, $n\geq 1$ **.** Pe o tablă sunt scrise numerele 1, 2, 3, ... $3n+2$.
Doi jucători, *A* şi *B*, şterg alternativ, începând cu *A*, câte trei numere de pe tablă. Dacă ultimele două numere rămase pe tablă sunt consecutive, atunci câştigă jucătorul care a şters ultimele trei numere.

a) Reuşeşte jucătorul *B* să câştige dacă $n=2014$? Justificaţi răspunsul.

b) Reuşeşte jucătorul *A* să câştige dacă $n=2015$? Justificaţi răspunsul.

a) Da. La fiecare dintre cele $3\cdot 2014:2=1007$ runde, jucătorul *B* şterge al doilea cele trei numere, deci el face ultima ştergere înainte ca pe tablă să rămână două numere.	**1p**

Jucătorul *B* grupează numerele de pe tablă în perechi de numere consecutive: $(1,2),(3,4),(5,6),...,(3\cdot 2014+1,3\cdot 2014+2)$	**2p**
Când jucătorul *A* şterge trei numere, el descompletează cel puţin două perechi. Jucătorul *B* va şterge trei numere astfel încât numărul total de perechi să scadă cu 3. Astfel, după ultima ştergere a jucătorului *B*, va rămâne pe tablă o pereche întreagă formată cu numere consecutive.	**2p**
b) Da. Jucătorul *A* şterge numerele $3\cdot 2015, 3\cdot 2015+1, 3\cdot 2015+2$. Astfel, pe tablă rămân scrise numerele de la punctul **a)**. După aceea, jucătorul *A* va proceda cum a procedat jucătorul *B* la punctul **a)**.	**2p**

<u>Problema 4</u>

Se consideră numerele naturale *a* şi *b*. Se construieşte şirul $a_1, a_2, a_3, ...$ astfel: $a_1 = a$, $a_2 = b$, iar , pentru oricare $n \geq 3$, a_n este egal cu restul împărţirii numărului $a_{n-1} + a_{n-2}$ la 5. Dacă $a = 6$ şi $b = 8$, calculaţi suma primilor 802 termeni ai şirului.

Avem $a_3 = 4, a_4 = 2, a_5 = 1, a_6 = 3, a_7 = 4$,	**2p**
Începând cu termenul al 3-lea termenii şirului se repetă din 4 în 4.	**2p**
Cum $802 = 4\cdot 200 + 2$, rezultă că suma cerută va fi $S = 6 + 8 + 200\cdot 10 = 2014$	**3p**