Concursul naţional de matematică

“LAURENŢIU PANAITOPOL”

Ediţia a VII-a, Bucureşti, 22.11.2014

Clasa a VII-a

Soluţii şi bareme

<u>Problema1</u>

Arătaţi că, dacă numerele a, b, a^2+b şi $a+b^2$ sunt prime, atunci şi numerele $a+b$ şi a^2+b^2 sunt prime.

Lucian Petrescu, Tulcea

Din ipoteză rezultă că $a=2$ sau $b=2$. Datorită simetriei tratăm doar cazul $a=2$. Obţinem aşadar că numerele b, $b+4$ şi b^2+2 sunt simultan prime.	**1p**
Dacă $b\geq 5$, atunci $b\equiv \pm 1 \pmod 3$, deci $b^2+2\equiv 0 \pmod 3$ şi cum b^2+2 este prim, ar rezulta că $b^2+2=3$, fals. Prin urmare $b\in\{2;3\}$.	**3p**
$b=2$ nu conduce la soluţii. Pentru $b=3$ se obţin numerele prime $a^2+b=7$ şi $a+b^2=11$. Aşadar $(a;b)\in\{(2;3);(3;2)\}$, caz în care rezultă $a+b=5$ şi $a^2+b^2=13$, ambele prime.	**3p**

<u>Problema2</u>

Numerele întregi distincte a, b şi c verifică egalitatea $a+b+c=(a-b)(b-c)(c-a)$.

Determinaţi cea mai mică valoare a numărului $|a+b+c|$.

selectată de Cristian Mangra, Bucureşti

Dacă numerele a, b şi c dau resturi diferite la împărţirea cu 3, atunci numărul $a+b+c$ se divide cu 3 ceea ce înseamnă că $(a-b)(b-c)(c-a)$ se divide cu 3. Contradicţie.	**1p**
Prin urmare, două dintre cele trei numere dau acelaşi rest r la împărţirea cu 3, fie acestea a şi b. Atunci $(a-b)(b-c)(c-a)$ se divide cu 3. Deci $a+b+c$ se divide cu 3. Deducem că şi numărul c dă restul r la împărţirea cu 3.	**2p**
Prin urmare $(a-b)(b-c)(c-a)$ se divide cu $3^3=27$. Cum două dintre numerele a, b şi c au aceeaşi paritate, rezultă că $(a-b)(b-c)(c-a)$ se divide cu 2.	**2p**
Deducem că $|a+b+c|$ se divide cu $27\cdot 2=54$, adică $|a+b+c|\geq 54$. De exemplu, pentru $a=15$, $b=18$ şi $c=21$, obţinem $|a+b+c|=54$.	**2p**

Problema3

Se consideră numerele raţionale pozitive şi distincte $a_1, a_2, a_3, ..., a_{31}$.

Dacă $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+...+\frac{1}{a_{31}}>5$, arătaţi că există $i=\overline{1,31}$ pentru care $a_i \notin \mathbb{N}^*$.

Mircea Fianu, Bucureşti

Fără a restrânge generalitatea, considerăm $a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_{31}$. Presupunem că toate numerele $a_1, a_2, a_3, ..., a_{31}$ sunt naturale. Obţinem $a_1 \geq 1, a_2 \geq 2, ..., a_{31} \geq 31$. Ca urmare $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+...+\frac{1}{a_{31}} \leq \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{31}=S$.	**2p**
Avem $S=1+\underbrace{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)}_{2\text{ termeni}}+\underbrace{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)}_{4\text{ termeni}}+...+\underbrace{\left(\frac{1}{17}+\frac{1}{18}+...+\frac{1}{31}\right)}_{16\text{ termeni}}$, deci $S<1+2\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{4}+8\cdot\frac{1}{8}+16\cdot\frac{1}{16}=5$. Contradicţie.	**5p**

Problema4

Se consideră triunghiul ascuţitunghic ABC în care $m\left(\widehat{BAC}\right)=2m\left(\widehat{ABC}\right)$. Punctul M este mijlocul laturii $[AB]$, iar $D\in(AB)$ astfel încât $CD\perp AB$. Arătaţi că $AC=2MD$.

***

Fie N mijlocul laturii $[AC]$. Segmentul $[MN]$ este linie mijlocie în triunghiul ABC, deci $MN \parallel BC$. Deducem că $m\left(\widehat{AMN}\right)=m\left(\widehat{ABC}\right)$. (1)	**2p**
În triunghiul dreptunghic ADC, $[DN]$ este mediană deci $DN=\frac{AC}{2}=AN$. (3) Obţinem că $m\left(\widehat{NAD}\right)=m\left(\widehat{NDA}\right)=m\left(\widehat{DMN}\right)+m\left(\widehat{DNM}\right)$. (2)	**3p**
Din relaţiile (1) şi (2) rezultă că $m\left(\widehat{DMN}\right)=m\left(\widehat{DNM}\right)$, deci $DM=DN$. (4) Din relaţiile (3) şi (4) rezultă concluzia.	**2p**