Concursul naţional de matematică

"LAURENŢIU PANAITOPOL"

Ediţia a VII-a, Bucureşti, 22.11.2014

Clasa a VIII-a

Soluţii şi bareme

Problema1

a) Demonstraţi că $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}<2x$ pentru orice număr real x, $x\geq 1$.

b) Demonstraţi că, dacă a şi b sunt numere reale pentru care există un număr real x, $x\geq 1$, astfel încât $\sqrt{a+\sqrt{x+1}}+\sqrt{b+\sqrt{x-1}}\geq\sqrt{a+\sqrt{x}}+\sqrt{b+\sqrt{x}}$, atunci $a<b$.

Traian Preda, Bucureşti

a) Ridicând la pătrat în ambii membri ai relaţiei din enunţ, obţinem relaţia echivalentă $\sqrt{x^2-1}<x$ care este, evident, adevărată.	**1p**
b) Ridicând la pătrat în ambii membri ai relaţiei din enunţ, obţinem $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}+2\sqrt{\left(a+\sqrt{x+1}\right)\left(b+\sqrt{x-1}\right)}\geq 2\sqrt{x}+2\sqrt{\left(a+\sqrt{x}\right)\left(b+\sqrt{x}\right)}$. Aplicând punctul **a)**, deducem că $\left(a+\sqrt{x+1}\right)\left(b+\sqrt{x-1}\right)>\left(a+\sqrt{x}\right)\left(b+\sqrt{x}\right)$, echivalent cu $a\sqrt{x-1}+b\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-1}>a\sqrt{x}+b\sqrt{x}+x$, de unde $\sqrt{x^2-1}-x>a\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)-b\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$. Cum $\sqrt{x^2-1}-x<0$, obţinem $a\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)<b\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$. (1)	**1p** **1p** **1p** **1p**
Din punctul **a)** avem $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}<\sqrt{x}-\sqrt{x-1}$ (2) Din (1) şi (2), deducem concluzia.	**2p**

Problema2

a) Arătaţi că, dacă x şi y sunt numere reale pozitive, atunci $\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq\sqrt{2}$.

b) Determinaţi numerele naturale a , b şi n pentru care $a+b=7^n$ şi $a^2+b^2=25^n$.

Lucian Petrescu. Bucureşti

a) Ridicând la pătrat inegalitatea aceasta devine echivalentă succesiv cu: $(x+y)^2\leq 2\left(x^2+y^2\right)\Leftrightarrow(x-y)^2\geq 0$, propoziţie adevărată, cu egalitate pentru $x=y$.	**1p**
Evident, numerele a şi b sunt pozitive şi, în plus, $a\neq b$. Din punctul **a)** rezultă $a^2+b^2>\dfrac{(a+b)^2}{2}$ şi, ţinând seama de enunţ, obţinem că $25^n>\dfrac{\left(7^n\right)^2}{2}$. Ultima inegalitate este adevărată numai pentru $n\in\{0;1\}$.	**4p**
Pentru $n=0$ obţinem $a+b=a^2+b^2=1$, cu soluţiile $(a;b)\in\{(0;1);(1;0)\}$.	**2p**

Pentru $n=1$ obţinem $a+b=7$ şi $a^2+b^2=25$, cu soluţiile $(a;b)\in\{(3;4);(4;3)\}$.	

Problema3

Se consideră pătratul *ABCD* îscris într-un cerc de centru *O* şi rază *r*. Punctul *M* este variabil pe arcul mic $\overset{\frown}{AB}$. Dacă $\{P\}=CM\cap BD$ şi $\{N\}=DM\cap AC$, demonstraţi că triunghiurile *APB* şi *DNP* au arii egale.

***

Avem $m\left(\widehat{BMC}\right)=m\left(\widehat{CMD}\right)=45^\circ$. Aplicând *teorema bisectoarei* în triunghiul *MBD*, obţinem $\frac{PB}{PD}=\frac{MB}{MD}$. (1)	**2p**
Cum $m\left(\widehat{BMD}\right)=m\left(\widehat{NOD}\right)=90^\circ$, rezultă că triunghiurile *DON* şi *DMB* sunt asemenea, prin urmare, $\frac{ON}{MB}=\frac{OD}{DM}$, echivalent cu $\frac{ON}{OD}=\frac{MB}{MD}$. (2)	**3p**
Din (1) şi (2), deducem că $\frac{PB}{PD}=\frac{ON}{OD}$, echivalent cu $PB\cdot OD=PD\cdot ON$ (3)	**1p**
Cum $OD=OA$, relaţia (3) devine $PB\cdot OA=PD\cdot ON$. Împărţind prin 2 ambii membri ai ultimei egalităţi, obţinem $A_{APB}=A_{NPD}$.	**1p**

Problema4

a) Se consideră numerele reale *a*, *b*, *c*, astfel încât $0<a<b$ şi $c\geq 0$.

Demonstraţi că $\frac{a+c}{b+c}\geq\frac{a}{b}$.

b) Dacă *x*, *y* şi *z* sunt numere reale nenegative astfel încât $x+y+z=\frac{1}{3}$, arătaţi că

$\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1-y}{1+y}\cdot\frac{1-z}{1+z}\geq\frac{1}{2}$.

selectată de Cristian Mangra, Bucureşti

a) Inegalitatea din enunţ este echivalentă cu $c(b-a)\geq 0$ care este, evident, adevărată.	**1p**
b) Avem $\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1-y}{1+y}=\frac{1-(x+y)+xy}{1+(x+y)+xy}$. (1) Punând $a=1-(x+y)$, $b=1+(x+y)$ şi $c=xy$, folosind punctul **a)** , obţinem $\frac{1-(x+y)+xy}{1+(x+y)+xy}\geq\frac{1-(x+y)}{1+(x+y)}$.(2) Din relaţiile (1) şi (2), rezultă $\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1-y}{1+y}\geq\frac{1-(x+y)}{1+(x+y)}$	**1p** **3p**
În continuare, folosind relaţia (2), obţinem $\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1-y}{1+y}\cdot\frac{1-z}{1+z}\geq\frac{1-(x+y)}{1+(x+y)}\cdot\frac{1-z}{1+z}\geq\frac{1-(x+y+z)}{1+(x+y+z)}$. Înlocuind $x+y+z=\frac{1}{3}$, rezultă concluzia.	**2p**