Societatea de Ştiinţe Matematice din România, filiala Bucureşti
Colegiul Naţional „Spiru Haret”, Bucureşti
Centrul de Documentare şi Informare „Laurenţiu Panaitopol”
Institutul de Matematică al Academiei Române

CONCURSUL DE MATEMATICĂ „LAURENŢIU PANAITOPOL”

Ediţia a VII-a, Bucureşti, 22 noiembrie 2014

Soluţii şi barem de corectare - clasa a IX-a

1. a) Arătaţi că $x + \dfrac{100}{x} \geq 20$, pentru orice $x > 0$.

b) Determinaţi valoarea minimă a sumei $[x] + \left[\dfrac{100}{x}\right]$ pentru $x \in (0, +\infty)$. (S-a notat cu $[a]$ partea întreagă a numărului real a)

Soluţie a) Deoarece $x > 0$, inegalitatea devine $x^2 - 20x + 100 \geq 0$ **1p**

Ea se reduce la $(x-10)^2 \geq 0$ – evident **2p**

b) Din $[a] > a - 1$ rezultă $[x] + [100/x] > 18$ **1p**

Cum $s(x) = [x] + [100/x]$ este întreg, $s(x) \geq 19$ ... **2p**

Pentru $x = 10{,}1$ se obţine $s(x) = 19$, deci valoarea minimă este 19 .... **1p**

2. Fie a, b, c, x numere reale astfel încât $abc \neq 0$ şi

$$\frac{ax + b(1-x)}{c} = \frac{bx + c(1-x)}{a} = \frac{cx + a(1-x)}{b}.$$

Arătaţi că $a + b + c = 0$ sau $a = b = c$.

Soluţie. Dacă $a + b + c \neq 0$, rapoartele din enunţ sunt egale cu $\dfrac{x(a+b+c) + (1-x)(b+c+a)}{a+b+c} = 1$ **2p**

Din $ax + b(1-x) = c$ obţinem $x(a-b) = c - b$ şi analoagele **2p**

Dacă două dintre numerele a, b, c sunt distincte, atunci toate sunt distincte şi rezultă

$$x = \frac{c-b}{a-b} = \frac{a-c}{b-c},$$

apoi $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$, sau $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$ – contradicţie – deci dacă $a+b+c \neq 0$, atunci $a = b = c$. **3p**

3. La un club de tenis de masă sunt 12 membri, care joacă doar între ei. Fiecare membru a jucat cel puţin un meci şi are, la fiecare moment, un număr de puncte egal cu raportul dintre numărul de meciuri câştigate şi numărul de meciuri jucate până atunci.

a) Calculaţi suma punctajelor membrilor clubului, dacă la momentul calculării punctajului fiecare jucase acelaşi număr de meciuri.

b) Arătaţi că, indiferent de numărul meciurilor jucate de fiecare membru, suma punctajelor membrilor clubului la un anumit moment nu este mai mică decât 1 şi nici mai mare decât 11.

Soluţie. Fie m_i şi c_i numărul meciurilor jucate, respectiv câştigate de jucătorul i şi p_i punctajul său.

Atunci, deoarece la fiecare moment numărul total al meciurilor pierdute este egal cu cel al celor câştigate, $m_1 + \ldots + m_{12} = 2(c_1 + \ldots + c_{12})$ **2p**

a) Dacă $m_1 = \ldots = m_{12} = m$, atunci $m_1 + \ldots + m_{12} = 12m$ şi $p_1 + \ldots + p_{12} = \dfrac{c_1 + \ldots + c_{12}}{m} = \dfrac{6m}{m} = 6$ **2p**

b) Avem de demonstrat că $p_1 + \ldots + p_{12} \geq 1$, adică $\dfrac{c_1}{m_1} + \ldots + \dfrac{c_{12}}{m_{12}} \geq 2\dfrac{c_1 + \ldots + c_{12}}{m_1 + \ldots + m_{12}}$. Înmulţind cu $m_1 + \ldots + m_{12}$ şi trecând termenii în membrul stâng, inegalitatea devine $\displaystyle\sum_{i=1}^{12} \frac{m_1 + \ldots + m_{12} - 2m_i}{m_i} c_i \geq 0$ şi este justificată de faptul că numărul meciurilor jucate de i nu depăşeşte numărul total al meciurilor celorlalţi **2p**

A doua inegalitate se reduce la prima, observând că dacă notăm p_i' punctajul pe care l-ar fi obţinut i dacă rezultatul fiecărui meci ar fi fost cel opus, atunci $p_i' = 1 - p_i$ şi $p_1' + \ldots + p_{12}' \geq 1$ **1p**

4. Fie ABC un triunghi, D şi E picioarele bisectoarelor din vârfurile B şi C, iar I punctul de intersecţie a bisectoarelor. Se ştie că $ID = IE$. Arătaţi că $AB = AC$ sau $\mathrm{m}(\widehat{A}) = 60°$.

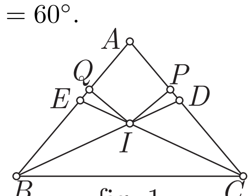

fig. 1

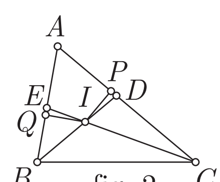

fig. 2

Soluţie. Fie P, Q proiecţiile lui I pe AC, respectiv AB. Atunci $\Delta IEQ \equiv \Delta IDP$ **2p**

Dacă $P \in (DA$, $Q \in (EA$ (fig. 1) sau $P \in (DC$, $Q \in (EB$, atunci $\angle IEB \equiv \angle IDC$ implică imediat $\angle ABC \equiv \angle ACB$ **2p**

Dacă $P \in (DA$, $Q \in (EB$ (fig. 2) sau $Q \in (EA$, $P \in (DC$, atunci $\angle IEB \equiv \angle IDA$ implică $180° - m(\widehat{B}) - m(\widehat{C})/2 = 180° - m(\widehat{A}) - m(\widehat{B})/2$, de unde rezultă uşor $m(\widehat{A}) = 60°$ **3p**