Societatea de Ştiinţe Matematice din România, filiala Bucureşti
Colegiul Naţional „Spiru Haret", Bucureşti
Centrul de Documentare şi Informare „Laurenţiu Panaitopol"
Institutul de Matematică al Academiei Române

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ,,LAURENŢIU PANAITOPOL"

Ediţia a VII-a, Bucureşti, 22 noiembrie 2014

Soluţii şi barem de corectare - clasa a X-a

1. Determinaţi numerele naturale $n \geq 2$ pentru care există numărul cu n cifre $\overline{x_1 x_2 \ldots x_n}$ astfel încât

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\overline{x_1 x_2 \ldots x_n}} + n} = \overline{0{,}x_1 x_2 \ldots x_n}$$

(unde bara indică scrierea zecimală.)

Soluţie. Dacă notăm $x = \overline{x_1 x_2 \ldots x_n}$, atunci egalitatea devine $x(\sqrt[n]{x} + n) = 10^n$ **3p**

Rezultă că $\sqrt[n]{x}$ este număr raţional, deci $x = a^n$, $a \in \mathbb{N}$ şi $a \mid 10$ **1p**

În cazul $a = 5$ obţinem $5 + n = 2^n$, cu soluţia unică $n = 3$, iar în cazul $a = 2$ nu obţinem nicio soluţie, deoarece, inductiv, $2^n > 5 + n$ pentru $n \geq 4$ şi $5^n > n + 2$ pentru $n \geq 2$ ... **3p**

2. Fie a, b, c laturile unui triunghi şi h_a, h_b, h_c înălţimile corespunzătoare. Arătaţi că, dacă $a \leq b \leq c$, atunci $a + h_a \leq b + h_b \leq c + h_c$.

Soluţie. $h_a = b \sin C = 2R \sin B \sin C$, $a = 2R \sin A$ şi analoagele **3p**

Prima inegalitate se reduce la $(\sin B - \sin A)(1 - \sin C) \geq 0$ **2p**

Ea este adevărată, deoarece $\sin C \leq 1$ iar $b \geq a$ implică $\sin B \geq \sin A$; analog pentru a doua inegalitate **2p**

3. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ numere reale din intervalul $[0, 1]$. Arătaţi că există $x \in [0, 1]$ astfel încât

$$2\left(|x - x_1| + |x - x_2| + \ldots + |x - x_n|\right) = n.$$

Soluţie. Putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$. Atunci funcţia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = (|x - x_1| + |x - x_2| + \ldots + |x - x_n|)$ este liniară pe intervalele $[0, x_1]$, $[x_1, x_2]$,...,$[x_n, 1]$ **2p**

Deducem că $I_0 = f([0, x_1])$, $I_1 = f([x_1, x_2])$,..., $I_n = f([x_n, 1])$ sunt intervale şi, cum $I_0 \cap I_1 \neq \phi$, $I_1 \cap I_2 \neq \phi$, ..., $I_{n-1} \cap I_n \neq \phi$, rezultă că $f([0, 1])$ este interval **3p**

Acest interval conţine $f(0) = x_1 + \ldots + x_n$ şi $f(1) = n - x_1 - \ldots - x_n$, deci şi $\frac{1}{2}(f(0) + f(1)) = \frac{n}{2}$. Astfel, există un punct $x \in [0, 1]$ cu proprietatea $2f(x) = n$ **2p**

4. Fie a_1, a_2,..., a_n numere reale. Arătaţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) $a_i + a_j \geq 0$, oricare ar fi i, j cu $1 \leq i < j \leq n$.

(ii) $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n \geq a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_n x_n^2$, oricare ar fi numerele reale $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0, 1]$ astfel încât $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$.

Soluţie. Dacă (ii) este adevărată, atunci pentru $x_i = x_j = \frac{1}{2}$ şi $x_\ell = 0$ dacă $\ell \neq i$, $\ell \neq j$ obţinem $\frac{1}{2}a_i + \frac{1}{2}a_j \geq \frac{1}{4}a_i + \frac{1}{4}a_j$, de unde $a_i + a_j \geq 0$ **2p**

Reciproc, dacă (i) este adevărată, atunci cel mult unul dintre numerele a_i este negativ şi avem două cazuri: **1p**

- dacă $a_i \geq 0, \forall i$, atunci $a_i x_i - a_i x_i^2 = a_i x_i (1 - x_i) \geq 0$ şi (ii) rezultă imediat **2p**

- dacă, de exemplu, $a_1 < 0$, atunci $a_1 x_1^2 + \ldots + a_n x_n^2 = a_1(1 - x_2 - \ldots - x_n)^2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_n x_n^2 = a_1 - 2a_1(x_2 + \ldots + x_n) + 2a_1(x_2 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n) + (a_1 + a_2)x_2^2 + \ldots + (a_1 + a_n)x_n^2 \leq a_1 - 2a_1(1 - x_1) + (a_1 + a_2)x_2 + \ldots + (a_1 + a_n)x_n = -a_1 + a_1 x_1 + a_1(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$ **2p**