Societatea de Ştiinţe Matematice din România, filiala Bucureşti
Colegiul Naţional „Spiru Haret”, Bucureşti
Centrul de Documentare şi Informare „Laurenţiu Panaitopol”
Institutul de Matematică al Academiei Române

CONCURSUL DE MATEMATICĂ „LAURENŢIU PANAITOPOL”

Ediţia a VII-a, Bucureşti, 22 noiembrie 2014

Soluţii şi barem - clasa a XI-a şi a XII-a

1. Determinaţi cel mai mare termen al şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $x_n = \frac{C_{n+2104}^{n}}{2^n}$.

Soluţie. Avem $x_n \leq x_{n+1} \Leftrightarrow 2(n+1) \leq n+2105 \Leftrightarrow n \leq 2103$ **5p**

Deducem $x_0 < x_1 < \ldots < x_{2103} = x_{2104} > x_{2105} > \ldots$, deci cel mai mare termen este $\frac{1}{2^{2104}}C_{4208}^{2104}$ **2p**

2. Pentru fiecare număr natural nenul n notăm $d(n)$ cel mai mic număr natural nenul care nu-l divide pe n. Arătaţi că şirul $(d(d(n)))_{n\geq 1}$ este mărginit.

Soluţie. Dacă n este impar atunci $d(n) = 2$, deci $d(d(n)) = 3$ **2p**

Dacă n este par, $d(n)$ nu poate fi divizibil cu doi factori primi distincţi, deoarece $d(n) = p^a q^b r$, cu $a, b \in \mathbb{N}^*$, p, q prime distincte şi prime cu r ar implica $p^a r \mid n$, $q^b r \mid n$, dar $p^a q^b r \nmid n$ – imposibil **3p**

Astfel, dacă n este par atunci $d(n)$ este o putere a unui număr prim impar, deci $d(d(n)) = 2$ **2p**

3. Arătaţi că, oricare ar fi numerele naturale $m > n \geq 2$, are loc inegalitatea

$$[m,n] + [m+1,n+1] > \frac{2\,(m+n)}{\sqrt{m-n}},$$

unde $[a,b]$ reprezintă cel mai mic multiplu comun al numerelor a şi b.

Soluţie. Dacă $n \nmid m$ şi $n+1 \nmid m+1$, atunci $[m,n] \geq 2m$ şi $[m+1,n+1] \geq 2(m+1)$, deci $[m,n]+[m+1,n+1] \geq 2m+2m+2 > 2m+2n \geq 2(m+n)/\sqrt{m-n}$ **2p**

Dacă $n \mid m$ şi $n+1 \nmid m+1$, sau $n \nmid m$ şi $n+1 \mid m+1$, atunci $[m,n] = m$ şi $[m+1,n+1] \geq 2(m+1)$, sau $[m,n] \geq 2m$ şi $[m+1,n+1] = m+1$, deci $[m,n]+[m+1,n+1] \geq 3m+1 > 2m+2n \geq 2(m+n)/\sqrt{m-n}$ **2p**

Dacă $n \mid m$ şi $n+1 \mid m+1$, atunci $[m,n] = m$ şi $[m+1,n+1] = m+1$, deci cerinţa devine $\sqrt{m-n}(2m+1) > 2m+2n$. Cum $m+1 \geq 2(n+1)$, este suficient să arătăm că $(2m+1)\sqrt{n+1} > 2m+2n$, sau $2m(\sqrt{n+1}-1) > 2n-\sqrt{n+1}$, ceea ce este evident pentru $n \geq 3$ şi rezultă imediat pentru $n = 2$ **3p**

4. Punctele unui cerc se colorează arbitrar cu roşu şi albastru. Arătaţi că:

a) putem găsi trei puncte pe cerc, de aceeaşi culoare, care sunt vârfurile unui triunghi isoscel;

b) putem găsi patru puncte pe cerc, de aceeaşi culoare, care sunt vârfurile unui trapez isoscel.

Soluţie a) Alegem cinci puncte care sunt vârfurile unui pentagon regulat; trei dintre ele au aceeaşi culoare, deci triunghiul determinat de ele îndeplineşte cerinţa **2p**

b) Considerăm un nonagon regulat $A_1A_2\ldots A_9$ înscris în cerc. Dintre cele nouă vârfuri, există 5 de aceeaşi culoare, de exemplu roşu. Apoi, dacă există un vârf albastru, împărţind cele 8 vârfuri rămase în patru grupe de vârfuri consecutive, trebuie să avem cel puţin o grupă cu vârfuri roşii. Astfel, în toate cazurile, dacă avem cel puţin 5 vârfuri roşii, atunci avem două vârfuri consecutive roşii, de exemplu A_1, A_2 .... **2p**

Celelalte trei vârfuri roşii le găsim în mulţimile $M_1 = \{A_3, A_9\}$, $M_2 = \{A_4, A_8\}$, $M_3 = \{A_5, A_7\}$ şi $M_4 = \{A_6\}$. Avem posibilităţile:

• există două vârfuri roşii în aceeaşi mulţime M_i, $1 \leq i \leq 3$; în acest caz $A_1A_2A_{i+2}A_{10-i}$ este trapez isoscel cu vârfuri roşii;

• există câte un vârf roşu în fiecare mulţime M_i, $1 \leq i \leq 3$. Atunci:

- dacă există două vârfuri roşii consecutive A_i, A_{i+1}, atunci $A_1A_2A_iA_{i+1}$ este trapez isoscel cu vârfuri roşii;

- dacă nu există două vârfuri roşii consecutive A_i, A_{i+1}, atunci avem vârfurile roşii A_1, A_2, A_3, A_5, A_8 - caz în care $A_1A_3A_5A_8$ este trapez isoscel cu vârfuri roşii, sau avem vârfurile roşii A_1, A_2, A_4, A_7, A_9 - caz în care $A_2A_4A_7A_9$ este trapez isoscel cu vârfuri roşii;

• A_6 este roşu şi există câte un vârf roşu în două dintre mulţimile M_i, $1 \leq i \leq 3$. Atunci, în funcţie de situaţie, obţinem trapezul isoscel cu vârfuri roşii $A_1A_2A_3A_4$ sau $A_2A_1A_9A_8$, $A_1A_2A_5A_6$ sau $A_1A_2A_6A_7$, $A_2A_4A_6A_9$, sau $A_1A_3A_6A_8$ **3p**