**Centrul Judeţean de Excelenţă la Matematică Constanţa**

**Prof. Florian-Aurelian Gache**
**C. N. ”Mircea cel Bătrân” Constanţa**

**Clasa a VIII-a. Lecţia 3**
**1. 11. 2014**

# NUMERE REALE

## A. Numere raţionale. Numere iraţionale

**1.** Fie $x, y, z$ numere reale nenule astfel încât $xy, yz, zx$ sunt numere raţionale.
**a)** Arătaţi că numărul $x^2 + y^2 + z^2$ este raţional.
**b)** Dacă, în plus, numărul $x^3 + y^3 + z^3$ este raţional și nenul, arătaţi că numerele $x, y, z$ sunt raţionale. (*Marius Ghergu*)

**2. a)** Fie $x$ un număr real astfel încât $x^2 + x$ şi $x^3 + 2x$ să fie numere raţionale. Arătaţi că $x$ este număr raţional.
**b)** Arătaţi că există numere iraţionale $x$ astfel încât $x^2 + x$ şi $x^3 - 2x$ să fie numere raţionale. (*Florica Banu*)

**3.** Să se afle numerele iraţionale $x$ astfel ca numerele $x^2 + 2x$ şi $x^3 - 6x$ să fie ambele raţionale. (*Virginia şi Vasile Tică*)

**4.** Fie numerele reale distincte nenule $a$ și $b$ care au proprietăţile: $a^2 + b \in \mathbf{Q}$ şi $b^2 + a \in \mathbf{Q}$.
Arătaţi că: **a)** numerele $a = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ şi $b = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$ verifică proprietăţile date;
**b)** dacă $a + b \in \mathbf{Q} \setminus \{1\}$, atunci $a$ și $b$ sunt numere raţionale;
**c)** dacă $\frac{a}{b} \in \mathbf{Q}$, atunci $a$ și $b$ sunt numere raţionale. (*Alexandru Blaga*)

**5.** Fie $a$ și $b$ două numere reale strict pozitive diferite, cu proprietatea că numerele $a - \sqrt{ab}$ şi $b - \sqrt{ab}$ sunt raţionale. Arătaţi că numerele $a$ şi $b$ sunt raţionale. (*Gazeta Matematică*)

**6.** Fie $x, y$ numere raţionale pozitive pentru care $\sqrt{x} + \sqrt{y} \in \mathbf{Q}$. Să se arate că $\sqrt{x} \in \mathbf{Q}$ şi $\sqrt{y} \in \mathbf{Q}$. (*Viorel Chinan*)

## B. Calcul algebric. Ecuaţii

**7.** Determinaţi perechile de numere întregi $(m, n)$ pentru care $9m^2 + 3n = n^2 + 8$.
(*Florin Nicoară şi Valer Pop*)

**8.** Fie $x, y, z$ numere reale pozitive astfel încât $xyz \cdot (x + y + z) = 1$.
**a)** Arătaţi că $\sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{y^2}\right)\left(y^2 + \frac{1}{z^2}\right)\left(z^2 + \frac{1}{x^2}\right)} = (x + y)(y + z)(z + x)$;
**b)** Determinaţi un triplet $(x, y, z)$ cu proprietatea din ipoteză.

**9.** Să se arate că există o infinitate de numere iraţionale $x$ și $y$ cu proprietatea că $x + y = xy \in \mathbf{N}$. (*Claudiu Ştefan Popa*)

**10.** Se consideră numerele reale strict pozitive $x, y, z$ cu proprietatea că $xy = \frac{z-x+1}{y} = \frac{z+1}{2}$.
Să se arate că unul dintre numere este media aritmetică a celorlalte două. (*Gheorghe Molea*)

**11. a)** Arătaţi că numărul $m^2 - m + 1$ aparţine mulţimii $\{n^2 + n + 1 \mid n \in \mathbf{N}\}$, oricare ar fi $m$ număr natural nenul.
**b)** Fie $p$ un pătrat perfect, $p > 1$. Demonstraţi că există numerele naturale nenule $r$ şi $q$ astfel încât $p^2 + p + 1 = (r^2 + r + 1)(q^2 + q + 1)$. (*Mircea Fianu*)

**12.** Numerele reale $a, b, c, d, e$ au proprietatea că $|a-b| = 2|b-c| = 3|c-d| = 4|d-e| = 5|e-a|$.
Să se arate că numerele $a, b, c, d, e$ sunt egale. (*Cristian Mangra*)

**13.** Determinaţi numerele naturale $m$ pentru care $\{\sqrt{m}\} = \{\sqrt{m+2011}\}$.
*Notă*. $\{x\}$ este partea fracţionară a numărului real $x$. (*Alexandru Blaga*)

**14.** Se consideră numerele reale $x, y$, cu $y \neq \frac{1}{2}$, astfel încât $x^2 - 2x = 4y^2 - 4y$. Dacă notăm $z = \frac{x-1}{2y-1}$, arătaţi că $z$ este număr întreg.

**15.** Determinaţi perechile de numere naturale nenule $(x, y)$ astfel încât $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.
(*Gheorghe Fianu*)

**16.** Rezolvaţi, în mulţimea numerelor întregi, ecuaţia $2x^2 + 2y^2 - 3x - 3y + 2 = 0$.
(*Constantin Apostol, GM 9/2014*)

**17.** Un triplet de numere naturale nenule se numește *pitagoric* dacă suma pătratelor a două numere din triplet este egală cu pătratul celui de-al treilea număr. Demonstrați că orice număr natural mai mare decât 2 se încadrează în cel puțin un astfel de triplet.
(*Paul Crestez, Suplimentul cu exerciții, GM 9/2014*)

**Temă: 3, 6, 9, 10, 12, 14, 16.**

**Bibliografie:**

**1.** Artur Bălăucă și colectiv - Olimpiadele Naționale ale României și Republicii Moldova. OBMJ, Ed. Taida, 2010
**2.** Colecţia Gazeta Matematică, seria B
**3.** http://www.mategl.com