Centrul Judeţean de Excelenţă
Constanţa

Prof. Zamfirescu Lavinia
Liceul Teoretic „Traian” Constanţa

Sume. Numere raţionale

Clasa a VII-a – Lecţia 3
01.11.2014

1. a) Verfificaţi egalitatea $\frac{1}{k\cdot(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$, $\forall\ k\in N^*$

b) Aflaţi x din egalitatea: $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{x\cdot(x+1)}=\frac{2013}{2014}$, $x\in N^*$

2. Comparaţi numerele:

$a=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2009}-\frac{1}{2010}$ şi

$b=\frac{1}{1006}+\frac{1}{1007}+\ldots+\frac{1}{2009}+\frac{1}{2010}$

Etapa locală, 2009, Dîmboviţa

3. Fie $a=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{999\cdot 1000}$. Arătaţi că $\frac{1}{2}<a<1$

Etapa locală, 2007, Gorj

4. a) Calculaţi suma $S=1=2+\ldots+n$, $n\in N$

b) Determinaţi $n\in N^*$ astfel încât x să aibă 256 divizori,

unde $x=\left(1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\ldots+\frac{1}{1+2+3+\ldots+2014}\right)^n\cdot\left(\frac{2015}{2}\right)^n$.

5. Fie $a=\frac{2^5}{31}+2^5+2^{10}+2^{15}+\ldots+2^{2015}$ şi

$b=\frac{1}{1+2+\ldots+64}+\frac{1}{1+2+\ldots+65}+\frac{1}{1+2+\ldots+66}+\ldots+\frac{1}{1+2+\ldots+2047}$.

Arătaţi că $a\cdot b$ este pătrat perfect.

Etapa locală, 2008,Bihor

6. Arătaţi că

$$a=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{2014^2} \text{ este mai mic decât } \frac{2013}{2014}$$

$$b=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\ldots+\frac{1}{2014^2} \text{ este mai mic decât } \frac{2013}{2014}$$

Culegere de matematică, Artur Bălăucă

7. Fie numărul $x\in R$, $x=\frac{1}{5}+\frac{7}{10}+\frac{8}{15}+\ldots+\frac{410}{2015}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{405}\right)$.

a) Arătaţi că x este pătrat perfect.

b) Aflaţi $n\in N^*$ astfel încât $\frac{x}{2n+1}\in N$

8. Determinaţi cifrele a,b,c şi $n\in N^*$ pentru care are loc egalitatea

$$\overline{abc}+\frac{\overline{abc}}{2^2}+\frac{\overline{abc}}{2^3}+\ldots+\frac{\overline{abc}}{2^n}=2^n+2^{n-1}-1$$

Revista de matematică, 2010, Constanţa

9. Aflaţi $n\in N$ pentru care $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{2}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)}=\frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2014-1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2014}$

Profesor Andrei Nicoară, Galaţi

10. Fie numerele $A=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2013}{2014}$ şi $B=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2014}{2015}$

a) Calculaţi $A\cdot B$

b) Arătaţi că $A\cdot<B$

c) Arătaţi că a patra zecimală a numărului A^2 este cel mult 4

Profesor Gheorghe Nicoară, Brăila

Tema 3 - Centru de excelenţă clasa a VII-a

1. Aflaţi $x \in N^*$ din egalităţile:

a) $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\ldots+\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1003}{2010}$

b) $\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{x}{2014\cdot 2015}=2014\cdot 2015$

Concurs RMCS, 2014 (Lucian Dragomir)

2. a) Verificaţi egalitatea $\frac{1}{(3n+1)\cdot(3n+4)}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+4}\right)$, $\forall\, n \in N$

b) Aflaţi $n \in N$ din egalitatea $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}=\frac{2010}{3033}$

3. Fie numerele $A=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}$ şi $B=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{n-1}{n}$, $n \in N^*$

Determinaţi $n>1$ pentru care media aritmetică a numerelor A şi B este $1006{,}5$.

4. a) Arătaţi că $S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}<2$, $\forall\, n \in N^*$.

b) Determinaţi $n \in N^*$ dacă $S_n=\frac{4019}{2010}$.

5. a) Determinaţi $a,b \in R$ ştiind că $3+3^2+3^3+\ldots+3^n=a-b$.

b) Aflaţi $n \in N$ dacă $a=364{,}5$.

6. Arătaţi că $n\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\geq(n+1)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+1}\right)$, $\forall\, n \in N^*$.