CENTRUL DE EXCELENŢĂ CONSTANŢA – Matematică
http://cjemcta.wikispaces.com

prof. Maria Burlăciuc
Şcoala Gimnazială "Tudor Arghezi" Năvodari

Lecţia 3 – clasa a VI-a
C.m.m.d.c. şi c.m.m.m.c. Numere prime între ele
01.11.2014

Se notează cu [*a*,*b*] cel mai mic multiplu comun al numerelor a şi b, iar cu (*a*,*b*) cel mai mare divizor comun al numerelor a şi b.

- $[a,b] \cdot (a,b) = a \cdot b$;
- Două numere naturale a şi b sunt prime între ele dacă (a,b) = 1
- Dacă $a \mid c$, $b \mid c$ şi (a,b) = 1, atunci $a \cdot b \mid c$
- Dacă $a \mid b \cdot c$ şi $(a,b) = 1 \Rightarrow a \mid c$ (Teorema lui Gauss) ;
- Dacă $(a,b) = d \Rightarrow \exists\ x, y \in \mathbf{N}$ astfel încât $(x, y) = 1$ şi $a = dx$, $b = dy$;
- Dacă $[a,b] = m \Rightarrow \exists\, x, y \in \mathbf{N}$ astfel încât $(x, y) = 1$ şi $m = ax$, $m = by$.

Exerciţii şi probleme rezolvate:

1. Să se arate că suma a două numere naturale consecutive şi suma pătratelor lor sunt numere prime între ele.

Soluţie:

Fie n şi $n+1$, $n \in \mathbf{N}^*$, două numere naturale consecutive. Suma lor este $n + n + 1 = 2n + 1$

Suma pătratelor lor este:

$$n^2 + (n+1)^2 = n^2 + (n+1)(n+1) = n^2 + n^2 + n + n + 1 = 2n^2 + 2n + 1$$

Fie $(2n+1, 2n^2+2n+1) = d$

$$\left.\begin{matrix} d \mid 2n+1 \\ d \mid 2n^2+2n+1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow d \mid (2n^2+2n+1) - (2n+1) \Rightarrow d \mid 2n^2 \quad (1)$$

Cum $d \mid 2n+1 \Rightarrow d \mid n(2n+1) \Rightarrow d \mid 2n^2+n \quad (2)$

Din relaţiile (1) şi (2) $\Rightarrow d \mid (2n^2+n) - 2n^2 \Rightarrow d \mid n$

$$\left.\begin{matrix} d \mid n \\ d \mid 2n+1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow d \mid 2n+1-n \Rightarrow d \mid n+1$$

$$\left.\begin{matrix} d \mid n \Rightarrow d \mid 2n \\ d \mid n+1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow d \mid 2n+1-2n \Rightarrow d \mid 1 \Rightarrow d = 1 \Rightarrow 2n+1 \text{ şi } 2n^2+2n+1 \text{ sunt numere prime}$$

între ele.

2. Se consideră numărul $A_n = (n-1) \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n^2+1) \cdot (n^4+1)$, $n \in \boldsymbol{N}^*$. Aflaţi c.m.m.d.c. al numerelor $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{2000}$.

Soluţie:

Dăm valori lui n şi cercetăm divizorii numerelor $A_1, A_2, A_3, \ldots$

$n = 1 \Rightarrow A_1 = (1-1) \cdot 1 \cdot (1+1) \cdot (1^2+1) \cdot (1^4+1) = 0$

$n = 2 \Rightarrow A_2 = (2-1) \cdot 2 \cdot (2+1) \cdot (2^2+1) \cdot (2^4+1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17$

$n = 3 \Rightarrow A_3 = (3-1) \cdot 3 \cdot (3+1) \cdot (3^2+1) \cdot (3^4+1) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 82 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 41$

$n = 4 \Rightarrow A_3 = (4-1)\cdot 4\cdot(4+1)\cdot(4^2+1)\cdot(4^4+1) = 3\cdot 4\cdot 5\cdot 17\cdot 257 = 2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 17\cdot 257$

Observvăm că A_1, A_2, A_4 se divid cu 17, iar A_3 nu se divide cu 17, deci 17 nu este un divizor comun

Cercetăm dacă numerele A_n se divid prin 2; 3 şi 5.

$n\cdot(n+1) \vdots 2$ (produs de două numere consecutive) $\Rightarrow A_n \vdots 2$

$(n-1)\cdot n\cdot(n+1) \vdots 3$ (produs de trei numere consecutive) $\Rightarrow A_n \vdots 3$

Numărul natural n poate fi de forma $5k, 5k+1, 5k+2, 5k+3, 5k+4$

Dacă $n = 5k \Rightarrow n \vdots 5 \Rightarrow A_n \vdots 5$

Dacă $n = 5k+1 \Rightarrow n-1 = 5k+1-1 = 5k \Rightarrow (n-1) \vdots 5 \Rightarrow A_n \vdots 5$

Dacă $n = 5k+2 \Rightarrow n^2+1 = (5k+2)^2+1 = M_5 + 2^2 + 1 = M_5 \Rightarrow (n^2+1) \vdots 5 \Rightarrow A_n \vdots 5$

Dacă $n = 5k+3 \Rightarrow n^2+1 = (5k+3)^2+1 = M_5 + 3^2 + 1 = M_5 + 10 \Rightarrow (n^2+1) \vdots 5 \Rightarrow A_n \vdots 5$

Dacă $n = 5k+4 \Rightarrow n+1 = 5k+4+1 = 5k+5 = 5(k+1) \Rightarrow (n^2+1) \vdots 5 \Rightarrow A_n \vdots 5$

Am demonstrat că $A_n \vdots 5$, oricare ar fi numărul natural nenul *n*.

Am obţinut că A_n este divizibil cu numerele prime 2, 3 şi 5, deci numărul A_n este divizibil şi cu produsul lor, adică $A_n \vdots 30$.

Deoarece, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$, $A_n \vdots 30$, atunci c.m.m.d.c. al numerelor $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{2000}$ este 30.

Exerciţii şi probleme propuse:

1. Să se determine numerele naturale a şi b ştiind că [a-2, b-2] = 120; (a-2,b-2) = 10 şi [a+8,b+8]= 200 ; (a+8,b+8) = 10.
2. Determinaţi numerele a, b, c ∈**N*** ştiind că a+b+c = 106; (a,b) = 4; (a,c) = 6; (b,c) = 10.
3. Aflaţi numerele naturale a şi b prime între ele, astfel încât sa fie îndeplinite simultan condiţiile:
   (a,b)·[a,b] = $2^p\cdot 3^q\cdot 5^r$, unde p, q, r sunt numere naturale nenule, p < q < r.
   a·b are 30 de divizori naturali.
4. Suma a trei numere naturale este 2007. Împărţind al treilea număr la suma primelor două numere, se obţine câtul 20 şi restul 12. Dacă cel mai mare divizor comun al primelor două este 19, să se determine cele trei numere.
5. Fie A = $24^{n+1} - 24^n\cdot 4$, n∈**N***. Notăm cu x numărul divizorilor numărului $4^{3(n+1)-1}\cdot A$, respectiv y numărul divizorilor numărului $2^n\cdot A$. Determinaţi valoarea raportului $\frac{[x,y]}{(x,y)}$.
6. Determinaţi numerele naturale a şi b astfel încât $a^2 - b^2 = 6480$ şi c.m.m.d.c. (a,b) = 12.
   Utilizăm $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
   (Vasile Chiriac, G.M. nr. 10/2009)
7. Numerele naturale distincte a şi b verifică 9·[a,b] =a·b·(a,b).
   i) Aratati că a şi b nu sunt prime între ele.
   ii) Arătaţi că diferenţa numerelor este cel puţin 3.
   (Gheorghe Gherasim, G.M. nr. 9/2012)
8. Determinaţi numerele naturale a şi b ştiind că [a,b] - (a,b) = 176 şi $\frac{[a,b]}{(a,b)}$ = 45.
   (G.M. nr. 1/2009)
9. Aflaţi numerele natural a şi b ştiind că [a,b] este de 15 ori mai mare decât (a,b) şi 5a+3b= 150.

(Nicolae Paraschiv, G.M. nr. 10/2012)

10. Câtul numerelor naturale a şi b este 0,4. Determinaţi numerele dacă:
    a) (a,b) = 20 b) [a,b]= 700
11. Fie a un număr divizibil cu 8 şi nedivizibil cu 16. Să se arate că produsul tuturor divizorilor săi naturali este un pătrat perfect. (Felician Preda, G.M. nr. 11/2012)
12. Calculaţi suma S = (n+1, 2n+5) + (n+2, 2n+7) + (n+1002, 2n+2007), n $\in$**N**.
13. Pentru n$\in$**N** se consideră numerele a = 2n+5 şi b = 5n+12. Să se arate că [a,b]=a · b.
14. Determinaţi valorile natural ale lui n pentru care (3x+11, 5x-3) = 2^n.

    (Valer Pop, G.M. nr. 11/2011)
15. Determinaţi cel mai mic număr natural n, care împărţit la 5 dă restul 1, împărţit la 6 dă restul 3, împărţit la 7 dă restul 5 şi împărţit la 8 dă restul 7.
16. Aflaţi a$\in$**N**, ştiind că c.m.m.d.c. al numerelor 5a+13 şi 3a+5 este a+1.
17. Să se afle numerele natural a şi b, ştiind că [a,b] – (a,b) = 34.
18. Determinaţi numerele naturale a şi b dacă $a^2 - b^2$ = 7935 şi (a,b) = 23. Utilizăm $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.
19. Determinaţi numerele naturale nenule a, b, a < b pentru care are loc relaţia:
    3·[a,b] + 5 · (a,b) = 123.
20. Fie n un număr natural astfel încât a = 7n +6 şi b = 6n +7 nu sunt prime între ele, iar cel mai mic multiplu comun al numerelor a şi b este 728. Aflaţi numerele a şi b.

    (Ion Voicu, G.M. nr. 6-7-8/2012)

Temă: Problemele 11, 12, 14,16,17,18,20

Bibliografie:

1. Artur Bălăucă – OLIMPIADE, CONCURSURI ŞI CENTRE DE EXCELENŢĂ – clasa a VI-a, Editura TAIDA, Iaşi, 2012
2. Dan Brânzei (coordonator) – Matematică- olimpiade şi concursuri şcolare, Editura PARALELA 45, Piteşti, 2010
3. Maranda Linţ, Dorin Linţ, Rozalia Marinescu, Dan Ştefan Marinescu, Mihai Monea, Steluţa Monea, Marian Stroe – Matematică de excelenţă pentru concursuri, olimpiade şi centre de excelenţă, clasa a VI-a, Editura PARALELA 45, Piteşti, 2014
4. Nicolae Grigore, Sorin Ion, Ramona Mâinea, Teodora Popa – MATEMATICĂ- OLIMPIADE ŞI CONCURSURI ŞCOLARE – Clasa a VI-a, Editura Nomina, Piteşti, 2012
5. Petre Năchilă, Cătălin Eugen Năchilă – EXERCIŢII ŞI PROBLEME PENTRU CERCURILE DE MATEMATICĂ- clasa a VI-a, Editura Nomina, Piteşti, 2011
6. Radu Gologan (coordonator) - OLIMPIADE ŞI CONCURSURI ŞCOLARE- clasele IV-VI, Editura PARALELA 45,Piteşti, 2012
7. Tuţă Luca- 409 Probleme de matematică –Rezolvări complete, Editura ALL EDUCAŢIONAL, Bucureşti, 2006
8. Colecţia GAZETA MATEMATICĂ
9. www.olimpiade.ro
10. www.mategl.ro