Centrul Judeţean de Excelenţă la Matematică Constanţa

prof. Doina Stanca
Şcoala Gimnazială "D. Cantemir" Constanţa

Clasa a VIII-a. Lecţia 2
25. 10. 2014

CERCUL

Puterea punctului faţă de cerc

Teoremă : *Dacă* A, B, C, D *sunt patru puncte distincte situate pe un cerc* $C(O,R)$ *astfel încât* $AB \cap CD = \{M\}$ *,atunci* $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.

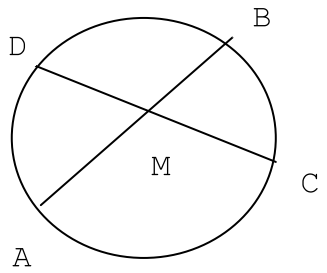
Demonstraţie : Evident , deosebim cazurile :

1) $M \in Int\ C(O,R)$

Din $\Delta MAC \sim \Delta$ MDB , de unde

$\frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MB}$ sau

$MA \cdot MB = MC \cdot MD$.



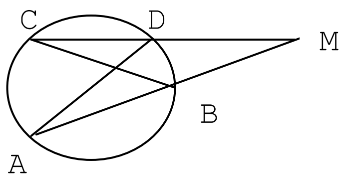
Concluzie: dacă $M \in Int\ C(O,R)$ atunci pentru orice coardă (AB) care conţine punctul M , **produsul** $MA \cdot MB$ **este constant**.

Valoarea constantă a acestui produs înmulţită cu (-1) se notează cu $\rho(M)$ şi se numeşte ***puterea punctului interior*** M faţă de cercul dat .

2) $M \in Ext\ C(O,R)$

Din$\Delta MBC \sim \Delta$ MDA

$\frac{MB}{MD} = \frac{MC}{MA}$,de unde aceeaşi egalitate $MA \cdot MB = MC \cdot MD$



Valoarea constantă a acestui produs se notează cu $\rho(M)$ şi se numeşte ***puterea punctului exterior*** M faţă de cerc.

Dacă M este un punct fixat ne propunem acum să determinăm în funcţie de elemente cunoscute , expresia puterii sale faţă de cerc.

1) $M \in Int\ C(O,R)$

E suficient să considerăm coarda *(AB)* ca fiind diametru şi deci

$\rho(M) = -MA \cdot MB = -(R+OM)(R-OM) = OM^2 - R^2$

2) $M \in Ext\ C(O,R)$

La fel , considerăm *A* , *O* , *M* , *B* coliniare (în această ordine) astfel încât *(AB)* este diametru şi astfel avem : $\rho(M) = MA \cdot MB = (R+OM)(OM-R) = OM^2 - R^2$.

Observaţie : Dacă $M \in C(O,R)$, $\rho(M) = 0$,iar dacă MT e tangentă la cerc, punctul T fiind punctul de tangenţă , avem $MT^2 = OM^2 - R^2 = \rho(M)$. Deci, pentru orice punct M din planul cercului $C(O,R)$ avem : $\rho(M) = OM^2 - R^2$.

Probleme propuse

1 . Dacă $C(O,R)$ şi $C(I,r)$ sunt cercul circumscris , respectiv cercul înscris pentru un triunghi *ABC*, atunci $OI^2 = R^2 - 2Rr.$

2 . Dacă ABC este un triunghi în care BC = a, AC **=** b, AB = c şi R este raza cercului circumscris triunghiului ABC, atunci: $\frac{a}{\sin(\measuredangle A)} = \frac{b}{\sin(\measuredangle B)} = \frac{c}{\sin(\measuredangle C)} = 2R$

Teorema sinusurilor

3. Prin punctul A exterior cercului C (***O,r)*** se duc două drepte care intersectează cercul în B,C, B∈(AC) respectiv în D, E, D∈(AE) . Paralela prin D la BC intersectează a doua oară cercul în F. Fie (*AF)* ∩ C (***O,r)*** $=\{G\}$ și $AB \cap EG = \{M\}$. Demonstrați că: $\frac{1}{AM} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$

4. Fie [PQ] o coardă a unui cerc și M mijlocul ei . Prin M se duc două coarde , [AB] și [CD].Dacă [AD] și [BC] intersectează [PQ] în punctele E, respectiv F, demonstrați că M este mijlocul segmentului [EF].

Teorema fluturelui

5. Dacă M este un punct situat pe arcul $\widehat{BC}$ al cercului circumscris triunghiului echilateral ABC, atunci există relaţia: AM = BM + CM. ***(teorema lui SCHOOTEN)***

6.Fie M un punct pe cercul circumscris triunghiului echilateral ABC și nesituat pe arcul $\widehat{BAC}$. Să se arate că : $MA^2 - MB \cdot MC = AB^2$.

G.M. Nr.5/1994

7. Se consideră triunghiul ABC cu $m(\measuredangle ABC) = 40^0$ și $m(\measuredangle ACB) = 30^0$. Pe latura (BC) se consideră punctele D și E, astfel încât $m(\measuredangle DAB) = 40^0$ și $m(\measuredangle EAC) = 30^0$. Fie G intersecția paralelei prin D la dreapta AB cu latura (AC). Dacă J este punctul de intersecție dintre dreptele AE și BG , arătați că $[JB] \equiv [JC]$

G.M-B Nr.10/2013

8. Se consideră un triunghi ABC şi $D \in (AB), E \in (AC)$ astfel încât $DE \,//\, BC,$ iar P un punct în interiorul triunghiului ADE. Se notează $PB \cap DE = \{F\}, PC \cap DE = \{G\}.$ Dacă O este centrul cercului circumscris triunghiului PDG , iar Q centrul cercului circumscris triunghiului PEF , să se arate că $AP \perp OQ.$

9 . Se consideră un cerc în care este înscris triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$). Prin A se duce o coardă care intersectează (BC) în E şi cercul în F. Să se arate că AB este tangentă cercului circumscris triunghiului BEF .

(Mihail Şt. Botez)

10 . Se consideră două puncte fixe A şi B pe diametrul unui semicerc , egal depărtate de centru , iar M şi N două puncte variabile pe semicerc astfel încât $AM \parallel BN$. Să se arate că produsul $AM \cdot BN$ este constant .

(Admitere facultate,1986)

11. Dacă $C(O,R)$ este cercul circumscris triunghiului ABC în care G este centrul de greutate al triunghiului, iar $AB = c, BC = a, CA = b$, atunci : $OG^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$.

Temă pentru acasă: problemele: 1, 3, 4, 6, 7, 9 şi 10

Bibliografie:

1. Artur Bălăucă – OLIMPIADE, CONCURSURI ŞI CENTRE DE EXCELENŢĂ – clasa a VIII-a, Editura TAIDA, Iaşi, 2012
2. D.M.Bătineţu-Giurgiu şi colectiv – Probleme date la olimpiadele de matematică pentru licee(1950-1990),Ed. Ştiinţifică, Bucureşti,1992
3. M.Şt.Botez – Probleme de geometrie , Ed. Tehnică , Bucureşti , 1976
4. L.Nicolescu , V. Boskoff – Probleme practice de geometrie , Ed. Tehnică , Bucureşti , 1990
5. Maranda Linț,…- MATEMATICĂ DE EXCELENȚĂ- pentru concursuri, olimpiade şi centre de excelență, Editura PARALELA 45, Piteşti, 2013
6. Colecţia GAZETA MATEMATICĂ
7. www.olimpiade.ro