Centrul de excelență Constanța

prof. A Cărnaru **25 oct. 2014**

Lecția 2- Numere întregi; valoarea absolută; divizibilitate în Z

Suport teoretic

Definiție. Fie a,b $\in$Z si b $\neq$0. Numerele q $\in$Z si r $\in$ {0,1,...,|b|-1} se numesc câtul și respectiv restul împărțirii numărului a la b dacă a = bq + r.
Se demonstrează că pentru orice numere întregi a, b; b $\neq$ 0, exista numere întregi q, r, unice, r $\in${0,...,|b| - 1} .

Definiție. Numerele întregi a,b $\in$Z se numesc prime între ele dacă (a,b) = 1.

Proprietăți. Fie a,b,c $\in$ Z.

1. Dacă a| b, b| c, atunci a| c (proprietatea de tranzitivitate).
2. Dacă a| b, a| c, atunci a| (b + c).
3. Dacă a|b, atunci pentru orice intregi c are loc a| (bc).
4. Dacă (ac)| (bc) si c $\neq$ 0, atunci a|b.
5. Fie a| (bc) si (a,c) = 1, atunci a|b.
6. Dacă a| c, b| c si (a,b) = 1, atunci (ab)| c.
7. (a,b)·[a,b] = a·b.
8. (a,b±a) = (a,b).

Congruențe

Definiție. Fie a,b $\in$ Z si c $\in$ Z\{0}. Vom spune ca numărul a este congruent cu numărul b modulo c, notând a $\equiv$ b (mod c), dacă c| (a – b). În caz contrar se spune că numărul a nu este congruent cu b modulo c.

Proprietăți:

Fie a,b,c,d, a_1, a_2 , b_1, b_2 numere întregi, d>0, atunci:

1. a $\equiv$ a(mod d)
2. Dacă a $\equiv$ b(mod d), atunci b $\equiv$ a(mod d).
3. Dacă a $\equiv$ b(mod d), b $\equiv$ c(mod d), atunci a $\equiv$ c(mod d).
4. Dacă $a_1 \equiv b_1$(mod d) si $a_2 \equiv b_2$(mod d), atunci $(a_1 + a_2) \equiv (b_1 + b_2)$(mod d).
5. Dacă $a_1 \equiv b_1$(mod d) si $a_2 \equiv b_2$(mod d), atunci $(a_1a_2) \equiv (b_1b_2)$(mod d).
6. Dacă ac $\equiv$ bc(mod dc), atunci a $\equiv$ b(mod d).
7. Dacă a $\equiv$ b(mod dc), atunci a $\equiv$ b(mod d).
8. Dacă a $\equiv$ b(mod d), a $\equiv$ b(mod c) si (d,c) = 1, atunci a $\equiv$ b(mod dc).
9. Dacă a $\equiv$ b(mod d), atunci pentru orice c $\in$ Z ac $\equiv$ bc (mod d).
10. Dacă ac $\equiv$ bc(mod d) si (c,d) = 1, atunci a $\equiv$ b(mod d).

Teorema mică a lui Fermat.

Fie p un număr prim. Pentru orice număr întreg a este adevarată relația $a^p \equiv a(mod\ p)$.

Numărul divizorilor:

Dacă $n = {p_1}^{k_1} \cdot {p_2}^{k_2} \cdot {p_3}^{k_3} \cdot \ldots \cdot {p_r}^{k_r}$ este descompunerea în factori primi distincți ai lui n , iar $p_j, j = \overline{1,r}$ sunt numere prime distincte numărul divizorilor naturali se poate calcula cu formula :

$\tau(n) = (k_1 + 1) \cdot (k_2 + 1) \cdot (k_3 + 1) \cdot \ldots \cdot (k_r + 1)$.

Suma divizorilor :

Suma divizorilor naturali se poate calcula cu formula :

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d = \prod_{i=1}^{r} \frac{{p_i}^{(k_i+1)} - 1}{p_i - 1}$$

Exemplu : pentru n = 20= $2^2 \cdot 5$ avem $\tau(20) = 6,\ \sigma(20) = 42$.

Indicatorul lui Euler sau funcția lui Euler se notează cu **φ(n)** (unde n este un număr natural nenul) și **φ(n)** reprezintă numărul de numere mai mici sau egale cu n și prime cu acesta.
Ex.: φ(0) = 1 prin convenție; φ(1) = 1 ; φ(2) = 1 ; φ(3) = 2 ; φ(4) = 2 ; φ(5) = 4 ; φ(720) = 192 ; φ(2008)
φ(p)=p-1 , dacă p este număr prim.
Avem formula: $\varphi(n) = (p_1 - 1) \cdot {p_1}^{k_1 - 1} \cdot ... \cdot (p_r - 1) \cdot \ {p_r}^{k_r - 1}$
Aceasta se poate scrie și $\varphi(n) = n \cdot \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$, unde produsul se face după numerele prime distincte p_r.

Teorema lui Euler:
$a^{\varphi(n)} \equiv 1(mod\ n)$, unde (a, n) = 1 , φ(n) este indicatorul lui Euler, a este număr întreg și n>1, natural.
Dacă n este număr prim se obține mica teoremă a lui Fermat.

Formule utile
1) $(a - b) \mid (a^n - b^n)$
2) $(a + b)^n = k \cdot a + b^n$, unde a, b sunt întregi, n număr natural nenul, k număr întreg.

Exerciții propuse

1. Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției
   P : ”Există (a, b)∈NxN astfel încât 3a(a + 13) = 6b + 33”.
2. Arătați că $2^{341} \equiv 2\ mod\ 341$. Obs: 341 nu este număr prim!
3. Arătați că ecuația $(x + 1)^4 + (x + 2)^4 + (x + 3)^4 + \cdots + (x + 2010)^4 = y^2$ nu are soluții în numere întregi.
4. Să afle ultimele 3 cifre ale numărului 2007^{2007}.
5. Să se arate că $(2001^{36 \cdot n} + 1999^{2001 \cdot n} - 2) \vdots 37\ \forall n \in \boldsymbol{N}$.
6. Aflați numerele $n \in N$ pentru care numărul $A = 33^n + 55^n + 77^n + 99^n$ se divide cu 8.
7. Arătați că orice număr natural prim cu 10 și 9 are un multiplu care se scrie în baza 10 numai cu cifre de 1. Dați exemplu de un număr de forma 111...1 care se divide cu 257.
8. Rezolvați în Z ecuația $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + \cdots + x_{14}^4 = 15999$. (OL SUA)
9. Arătați că pentru orice număr natural impar m există un număr natural nenul n astfel încât $m|2^n - 1$.
10. a) Aflați restul împărțirii numărului $N = 3^{2006} + 3^{2007}$ la 8. (GM-N. Stanciu)
    b) Aflați restul împărțiri numarului $N = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot 2013$ la 8.
11. a) Să se arate că $37 \mid (10^{2048} + 10^{2014} + 1)$. (RMT – I. Pîrșe)
    b) Să se arate că $(7^{2008} + 4 \cdot 11^{2008}) \vdots 37$. (Concurs IMAC- N. M Goșonoiu)

Tema

1. Fie S suma divizorilor naturali ai numărului n^n , n este un număr natural nenul. Aflați restul împărțirii lui S la n în cazul n=6. (RMT)
2. i) Pentru orice număr natural nenul arătați că $(n + 1)! - n! = n \cdot n!$
   ii) Dacă $A = 1005 \cdot 1005! + 1004 \cdot 1004! + \cdots + 2 \cdot 2! + 1 \cdot 1!$, aflați restul împărțirii lui A la 2012.(GM)
3. Fie a și b numere întregi. Arătați că dacă $7|(a^2 + b^2)$ atunci $7|a$ și $7|b$.
4. Să se arate că există o infinitate de numere naturale $n, n \geq 4$ cu proprietatea că 2^n are ultimele două cifre egale.(GM)
5. Se consideră $A \in \boldsymbol{N}, A = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_{2012}^2$, unde $x_1\ , x_2\ , ...\ x_{2012}$ sunt numere prime mai mari sau egale cu 5. Arătați că $B = 2 \cdot A + 2013$ nu este pătrat perfect.(GM)
6. Determinați ultimele 2 cifre ale numărului 43^{43}.