Centrul Județean de Excelență la Matematică

Prof. Raluca Balcan
Școala Gimnazială nr. 24 Ion Jalea

Clasa a VI-a. Lecția 2. Divizibilitate
25.10.2014

Considerații teoretice

- Criteriul de divizibilitate cu 11 Un număr e divizibil cu 11 dacă și numai dacă diferența dintre suma cifrelor de rang par și suma cifrelor de rang impar din numărul dat se divide cu 11.
- Criteriul de divizibilitate cu 7 Se scrie numărul N în baza 10 apoi se înlocuiește baza 10 cu 3 și se efectuează calculele. Dacă numărul obținut se divide cu 7 atunci numărul N se divide cu 7.
- Criteriul de divizibilitate cu 7, 11 sau 13 Numărul n se împarte de la dreapta spre stânga în grupe de câte trei cifre (ultima grupă poate avea mai puțin de trei cifre). Dacă diferența dintre suma numerelor ce formează grupele luate din doi în doi este un număr divizibil cu 7, 11 sau 13 atunci N se divide cu 7, 11 sau 13.
- Pornind de la formulele $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}\cdot b + \ldots + b^{n-1})$,

  $$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}\cdot b + a^{2n-2}\cdot b^2 - \ldots + b^{2n})$$

  Se pot demonstra proprietățile $a^n - b^n = M_{a-b}$

  $$a^{2n+1} + b^{2n+1} = M_{a+b}$$

  $$(a+b)^n = M_a + b^n = M_b + a^n$$

  $$(a-b)^{2n} = M_a + b^{2n} = M_b + a^{2n}$$

- Teorema fundamentală a aritmeticii. Orice număr natural compus se poate scrie ca produs de puteri de numere prime.
  Făcând abstracție de ordinea factorilor, descompunerea unui număr natural în produs de puteri de numere prime este unică. Reprezentarea $n = {p_1}^{\alpha_1}\cdot {p_2}^{\alpha_2}\cdot \ldots \cdot {p_k}^{\alpha_k}$, unde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k \in \mathbb{N}^*$ și $p_1, p_2, \ldots p_k$ sunt numere prime cu $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ se numește descompunere canonică a numărului n. În acest caz
  -numărul divizorilor numărului n este egal cu $(\alpha_1+1)\cdot(\alpha_2+1)\cdot \ldots \cdot(\alpha_k+1)$
  -suma divizorilor numărului n este egală cu $\frac{{p_1}^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{{p_2}^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\cdot \ldots \cdot \frac{{p_k}^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}$
- Definiție Dacă p e un număr prim, $n \in \mathbb{N}^*$ atunci evaluarea p-adică a lui n este cel mai mare număr natural k astfel încât $n \vdots p^k$. Se notează $k = v_p(n)$.
  exemple n=20=$2^2\cdot 5 \Rightarrow v_2(20)$=2, $v_5(20)$=1, $v_3(20)$=0
  n=5!=1$\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 2^3\cdot 3\cdot 5 \Rightarrow v_2(n)$=3
  Definiție Dacă $a \in \mathbb{Q}_+$ există și este unic $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $k \le a < k+1$. Numărul k se numește partea întreagă a lui a și se notează $[a]$.($[0]=0$)
  Exemple $[3{,}1]=3$ $[3{,}92]=3$ [3]=3 $[0,(2)]=0$

<u>Teoremă (Formula lui Legendre)</u> Dacă p e un număr prim și $n \in \mathbb{N}^*$ atunci $v_p(n!)=\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\ldots$ (există i$\in \mathbb{N}$ astfel încât $p^i > n \Rightarrow \left[\frac{n}{p^l}\right]=0\ (\forall)\ l \geq i,$ deci la un moment dat termenii sumei sunt egali cu 0)

<u>Probleme propuse</u>

1. Vom numi $superprim$ un număr natural prim, mai mare decât 10, care îndeplinește simultan următoarele condiții:
   i) este format din cifre distincte
   ii) oricum am schimba ordinea cifrelor sale, obținem tot un număr prim.
   Determinați toate numerele *superprime*.

   (Olimpiadă, 2009)
2. a) Determinați numerele naturale x și y, știind că $x^2+x+y=58$ și y este prim.
   b) Determinați numerele naturale x și y, știind că $3x+5y+y^2=20$ și x este prim.
   c) Scrieți numărul 2010 ca o sumă a unor numere naturale și ca produs al acelorași numere naturale.
3. Aflați numărul $\overline{abc}$ cu cel mai mic număr de divizori știind că $\overline{abc}=25(a+b+c)$.
4. Se consideră numerele A=$\overline{aaa}$ și B=$\overline{aaaa}$, unde a este o cifră nenulă. Arătați că numărul de divizori ai lui A este cel mult egal cu numărul de divizori ai lui B.

   (GMB nr.2/2014)
5. Stabiliți dacă există numere naturale nenule n, pentru care numărul n^2 să aibă de două ori mai mulți divizori decât n.
6. Arătați că , oricare ar fi cifrele a și b, numărul $\overline{ab15}$ are un număr par de divizori naturali.

   (GMB nr.1/2013)
7. Numim *drăguț* un număr natural $n>1$ care este egal cu produsul divizorilor săi proprii. Găsiți 11 numere *drăguțe* și arătați că suma lor este cub perfect.
8. Fie *n* un număr natural care este divizibil cu 6, dar nu este divizibil cu 4 și nu e divizibil cu 9. Arătați că:
   a) *n* nu este pătrat perfect;
   b) produsul tuturor divizorilor naturali ai numărului *n* este pătrat perfect.
9. Determinați numărul natural care are exact patru divizori iar produsul acestora este 2601.
10. Aflați cel mai mic număr natural care are 21 divizori și este divizibil cu 125.
11. Determinați numărul natural n care are exact 6 divizori, iar suma divizorilor este egală cu 28.
12. Se consideră numerele a, b, c, d prime mai mari ca 5, astfel încât $n=a^2+b^2+c^2+d^2$ să fie divizibil cu 10. Demonstrați că H=$(a\cdot b\cdot c\cdot d)^2-1$ e multiplu de 30.
13. a) Fie *p* un număr prim mai mare decât 6. Aflați ultima cifră a lui p^4.
    b) Aflați numerele prime *p* și *q*, știind că $p^4+q^4=29186$.

    (Olimpiadă, 2011)
14. Se consideră numărul natural A=${a_1}^2+{a_2}^2+\ldots+{a_{2012}}^2$, unde $a_1, a_2, \ldots, a_{2012}$ sunt

numere prime mai mari sau egale cu 5. Arătați că B=2A+2013 nu este pătrat perfect.

(GMB nr.1/2013)

15. Fie N=100!. a) Arătați că N⋮ 3^{48};

b) Determinați cel mai mare număr natural de forma 10^n care-l divide pe N.

16. În câte zerouri se termină 2013! ?
17. Care este exponentul lui 3 în descompunerea în factori primi a numărului $28 \cdot 29 \cdot ... \cdot 100$?
18. Arătați că numărul $\frac{101 \cdot 102 \cdot ... \cdot 200}{100!} \in \mathbb{N}$.

TEMĂ

1. Determinați numerele prime a, b și c care verifică relația $53a^2 + 159b - 134c = 2014$.

2. a) Să se arate că numărul $\overline{999999999a}$ este compus.

b) Să se arate că nu există patru numere prime, consecutive și impare.

3. Arătați că, dacă numărul N=$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (m-1) + 1$ se divide cu *m* atunci *m* e un număr prim.

4. Să se determine toate numerele naturale *n* și *p* pentru care $p, p + 3^n, p + 3^{n+1}, p + 3^{n+2}, \ p + 3^{n+3}$ sunt simultan numere prime.

5. Aflați cel mai mare număr natural, mai mic decât 2010, care are exact 14 divizori.

6. Fie p_1, p_2, p_3, p_4 numere prime astfel încât $p_1 > 5, p_2 - p_1 = p_4 - p_3 = 2$ și $p_3 - p_2 = 4$.

a) Demonstrați că dacă *n* este număr natural nenul, numărul $2{p_1}^{2012} + 3{p_2}^{2012} + 5{p_3}^{2012} + n{p_4}^{2012}$ este divizibil cu 5 dacă și numai dacă *n* este divizibil cu 5.

b) Arătați că numărul $(p_1 + 1)(p_2 + 1)(p_3 + 1)(p_4 + 1)$ este divizibil cu 160.

7. Să se arate că dacă $d_1, d_2, ..., d_s$ sunt divizorii naturali ai numărului $n \in \mathbb{N}^*$ și $(d_1 + d_2 + \cdots + d_s) \vdots n$ atunci $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \cdots + \frac{1}{d_s} \in \mathbb{N}$.

Bibliografie

1. Colecția Gazeta Matematică Bucureşti
2. Colecția Revista de Matematică şi Informatică Constanţa
3. Radu Gologan-Olimpiade și concursuri școlare clasele IV-VI, Ed. Paralela 45, 2011
4. Artur Bălăucă – Olimpiade, concursuri şi centre de excelenţă-clasa aVI-a, Ed Taida, 2013
5. Maranda Linț,… - Matematică de excelență pentru concursuri, olimpiade și centre de excelență, Ed.Paralela 45, 2014