Centrul județean de excelență în matematică
Constanța

prof. A Cărnaru **18 Oct 2014**

Lecția 1
Numere întregi; valoarea absolută; divizibilitate în Z

Modulul sau *valoarea absolută* a numărului a se defineşte astfel $|a| = \max\{-a; a\} = \begin{cases} a, \text{ dacă } a > 0 \\ 0, \text{ dacă } a = 0 \\ -a, \text{ dacă } a < 0 \end{cases}$

Proprietăţile modulului :

1. $|a| \geq 0$ pentru orice număr a;

2. $|-a| = |+a|, \forall a$;

3. $|a| = a \Leftrightarrow a \geq 0; |a| = -a \Leftrightarrow a \leq 0$;

4. $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$;

5. $|a+b| \leq |a| + |b|;\ |a-b| \leq |a| + |b|;\ ||a| - |b|| \leq |a-b|, \forall a,b$;

6. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|\ \forall a, b$; $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \forall a, b, b \neq 0$

7. $\max\{a; b\} = \frac{(a+b)+|a-b|}{2}; \min\{a; b\} = \frac{(a+b)-|a-b|}{2}$

Exerciții:

1. **a)** Dacă $a > 0$, calculaţi $|2a+1| - |-a-2|$; **b)** Dacă $a < 0$, calculaţi $|a-5| + |-a+3|$.
2. Folosind proprietăţile modulului, rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi

   a) $|2x+3| = 7$; **b)** $|x+3| = |2x-5|$; **c)** $|x+y+1| + |x-y+3| = 0$.

   d) $|x+1| + 1 = 0$; **e)** $|2x+3| = |-x+1|$;

   f) $|x-5| + |x^2-25| = 0$; **g)** $|x+2| + |x-3| = 0$; h) $\frac{|x+2| \cdot |x-3|}{|x-5|} = 0$; i) $|x+2| = x+2$

   j) $|3-\mathrm{x}| = \mathrm{x}-3$; k) $|2x+1| \cdot |2x+4| \cdot |10-5x| = 0$

3. Fie $A = \{1,2,3, \dots ,2013\}$ și $B = \{|a-b|\ \ |a, b \in A\}$. Aflați cardinalul mulțimii B.
4. Aflați cardinalul mulțimilor $A = \left\{x \in \boldsymbol{Z} \middle| \left||x|-2|-2\right| = 8\right\}$ și $B = \left\{x \in \boldsymbol{Z} \middle| \frac{5}{2|x+1|+|y-2|+1} \in \boldsymbol{Z}\right\}$.
5. Aflați valorile întregi ale numărului n astfel încât $N = \left|n + \frac{3^5}{2^5}\right|$ să aibă valoarea minimă.
6. Să se determine numerele raționale $x_1, x_2, \dots, x_{2015}$ astfel încât $x_1 + x_2 + \dots + x_{2015} = 2015$ și $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_3| = \dots = |x_{2014} - x_{2015}| = |x_{2015} - x_1|$.
7. Fie numerele raționale a,b,c cu $a + b + c = 4$. Arătați că $|a-1| + |b-2| + |c-3| \geq 2$.
8. Fie a și b numere întregi. Dacă $6|(a^2 + b^2)$ atunci $6|(a+b)$. (GM)
9. Rezolvați în Z: a) $|2x+3y+8| + |x+y+3| + |x+2y-1| = 5$

   b) $x^2 + x = 2013$; c) $x^2 + y^2 = 1983$; d) $xy^2 + 2007\,y^2 = 2008$ (GM)
10. Arătați că $\max\{|3-x|; x+2\} = \left|x - \frac{1}{2}\right| + \frac{5}{2}$, oricare ar fi numărul rațional x.

N Ivășchescu (GM)

Temă

1. Rezolvați în mulțimea numerelor raționale : a) $\left|x^2-16\right|+\left|x+4\right|=0$; b) $|x|=|-x|$;

   c) $|2x-1|=2x-1$; d) $|x-5|=5-x$; e) ; $|x-y-1|+|x+y-4|=0$ f) $|2x+3y-4|+|-x+5y|=0$

   g) $(x+1+2y)^2+(y-x-5)^2=0$; h) $(x-y-1)^2+|2x+3y+8|=0$.
2. Rezolvați în mulțimea numerelor raționale ecuația:
   $|x+1|+|x+2|+\cdots+|x+10|=4x-10$.
3. Câte soluții raționale are ecuația:
   $|x+1|+|x-2|+|x+3|+|x-4| \ldots+|x+99|+|x-100|=5000$.
4. Arătați că $|a+b+c|\leq 15$ știind că a,b,c sunt nr. întregi și $|2a+2b+c|\leq 1$,
   $|6a+3b+2c|\leq 1$ și $|15a+10b+6c|\leq 1$.
5. Fie a și b numere naturale. Dacă $11|(a^3+b^3)$ atunci $11|(a+b)$. (GM)
6. Dacă A= $\left\{(x,y)\in \boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}\middle| x,y\in\{1,2,\ldots,50\},\frac{3x+2y}{7}\in\boldsymbol{N}\right\}$, calculați card A.
7. Fie $a\in\boldsymbol{N}$ astfel încât 8 divide a, dar 16 nu divide a. Arătați că produsul divizorilor naturali ai lui a reprezintă un pătrat perfect. (GM)