LECȚIA 1 – ***Drepte, semidrepte, segmente. Operații cu lungimi de segmente. Mijlocul unui segment***

18 oct. 2014

Prof. Gheorghe Marian

A) ***Exerciții și observații pregătitoare***

1. ***a) Prin două puncte distincte se poate duce o singură dreaptă .***
b) Câte drepte se pot duce prin trei puncte distincte ?

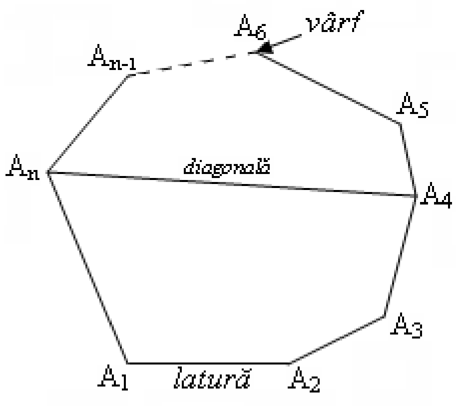
Spunem că o figură geometrică este „*determinată*" de anumite condiții, dacă este singura care îndeplinește aceste condiții .

c) Câte drepte determină 4 puncte distincte ?
d) Care este numărul maxim de drepte determinate de 2015 puncte distincte ? Dar numărul minim ? Se pot duce numai 2015 drepte ?

2. **a) Desenați patru puncte** A, B, C, D **distincte două câte două, astfel încât să avem simultan :**

i) Oricare trei dintre ele să fie necoliniare ;
ii) $[AB]\cap[CD]=\varnothing$;
iii) $[AD]\cap[BC]=\varnothing$;
iv) $[AC]\cap[BD]=\varnothing$.

b) ***O mulțime de segmente*** $[A_1A_2],[A_2A_3],[A_3A_4],\ldots,[A_{n-1}A_n],[A_nA_1]$, ***cu proprietățile :***
i) oricare trei puncte sunt necoliniare
ii) oricare două segmente nu au puncte interioare comune,
se numește <u>poligon</u>(simplu) $A_1A_2A_3\ldots A_n$ ***cu n laturi .***
Dacă, în plus, poligonul este situat în același semiplan față de dreapta suport a fiecărei laturi, el se numește poligon convex .
Numim <u>diagonală</u> a unui poligon convex segmentul care unește două vârfuri neconsecutive .
Cum se poate calcula numărul de diagonale ale unui poligon convex cu n laturi, folosind numărul de drepte determinate de n puncte ?



B)

3. **Punctele** A, O, B, M **sunt coliniare,** O **este mijlocul segmentului** $[AB]$, $M \notin [AB]$. **Arătați că** OM **este media aritmetică a segmentelor** $[MA]$ **și** $[MB]$.

4. A, B, C, D **sunt coliniare în ordinea dată . Studiați dacă :** $AB\cdot CD + AD\cdot BC = AC\cdot BD$ **.**

5. $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{2019}$ **sunt puncte coliniare în această ordine, încât** $A_1A_2 = 1$ **mm,** $A_2A_3 = 2$ **mm,** $A_3A_4 = 3$ **mm, … ,** $A_{2018}A_{2019} = 2018$ **mm .**

a) Calculați lungimea segmentului $[A_{1008}A_{2015}]$;

b) Dacă M_1 **este mijlocul segmentului** $[A_{2014}A_{2015}]$ **și** M_2 **este mijlocul segmentului** $[A_{2018}A_{2019}]$, **calculați lungimea** $[M_1M_2]$.

6. **Se dau punctele coliniare** A, B, C, D **în această ordine . Ştiind că** $\frac{AB}{AC}=\frac{CD}{BD}=\frac{2014}{2015}$, **calculaţi** $\frac{AD}{BC}$.

(GMB nr. 2 /2014 – adaptare)

7. **Se consideră segmentul** $[AB]$ **. Notăm cu** ***M*** **mijlocul lui** $[AB]$, M_1 **mijlocul lui** $[BM]$, M_2 **mijlocul lui** $[M_1A]$, M_3 **mijlocul lui** $[M_2B]$, M_4 **mijlocul lui** $[AM_3]$ **. Se ştie că** $M_1M_3 = M_2M_4 + 2$ **cm .**

   a) **Aflaţi lungimea segmentului** $[AB]$ ***;***

   b) **Notăm cu** M_a **şi** M_b **mijloacele segmentelor** $[M_2M_4]$ **şi** $[M_1M_3]$**. Arătaţi că** M_a **este mijlocul lui** $[AM_b]$ **.**

(Concursul „Micul matematician", GMB nr. 3 / 2014)

8. $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ **sunt puncte coliniare,** $A_1A_2 = x$, $A_2A_3 = 2x$, $A_3A_4 = 3x$, …, $A_{n-1}A_n = (n-1)\cdot x$, **cu** $x \in \mathbf{N}^*$ **.**

   a. **Dacă** M **este mijlocul segmentului** (A_9A_{10}) **şi** N **este mijlocul segmentului** $(A_{24}A_{25})$, **aflaţi lungimea segmentului** (MN)**;**

   b. **Aflaţi** x **şi** n, **astfel încât** $(A_1A_n) = 870$ **.**

(Concursul „Speranţe râmnicene", GMB nr. 10 / 2012)

9. **Fie** A, B, C, D **patru puncte coliniare astfel încât** $AB = 10$ **cm,** $BC = 4$ **cm şi** $AD = 3$ **cm . Aflaţi lungimea segmentului** $[DC]$, **analizând toate cazurile posibile .**

(GMB nr. 11 / 2012)

10. **Pe semidreapta** $[OP$ **se consideră punctele** $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{2014}$ **şi punctele** $B_0, B_1, B_2, \ldots, B_n$ **astfel încât** $OA_0 = 1$ **mm,** $OA_1 = 4$ **mm,** $OA_2 = 7$ **mm, ... ,** $OA_{2014} = 6043$ **mm,** $OB_0 = 3$ **mm,** $OB_1 = 7$ **mm,** $OB_2 = 11$ **mm, ...**

    a) **Calculaţi câţi cm sunt între** O **şi** A_{18}**;**

    b) **Calculaţi** $S = OA_0 + OA_1 + OA_2 + \ldots + OA_{2014}$**;**

    c) **Determinaţi** n **pentru care** B_n **este cel mai apropiat de** A_{2014}**.**

(Revista Axioma Ploieşti nr. 30 / 2009)

11. **Se consideră un segment** $[AB]$, **un punct** $C \in (AB)$, **astfel încât** $AC = \frac{3}{4}AB$ **şi un punct arbitrar** $D \in (AC)$ **. Dacă punctul** E **este situat pe semidreapta** $(DC$ **astfel încât** $DE = \frac{4}{3}CD$, **arătaţi că** $AD = 3\cdot BE$ **.**

(Ioan Ţicalo, GMB nr. 2 / 2013, Concurs Vatra Dornei, 2012)

12. **Fie punctele** A, B, C **şi** D **(în această ordine) astfel încât** $AB + 2\cdot BC + 3\cdot CD = 2\cdot AD$ **. Determinaţi poziţia punctului** $M \in (BC)$ **cu proprietatea că** $AM\cdot MC = MB\cdot MD$ **.**

(Olimpiadă, 2000)

C) ***Problemă „rezervă"***

✍ **Punctele** A, B, C **sunt pe aceeaşi dreaptă,** $A - B - C$, M, N **şi** P **sunt mijloacele segmentelor** $[AB], [BC]$, **respectiv** $[AC]$. Arătaţi că $AM + AP + AN = AB + AC$.

D) Temă

1. **Punctele $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ aparţin, în această ordine, dreptei d . Ştiind că $AA_1 = 1$cm, $AA_2 = 2$ cm, $AA_3 = 4$cm, … , $AA_n = 1024$ cm, aflaţi numărul de puncte situate pe dreapta d .**
(GMB nr. 9 /2014)

2. **Fie punctele A, B, C coliniare în această ordine, O mijlocul segmentului $[AC]$, iar M mijlocul segmentului $[BC]$. Demonstraţi că $AB = 2 \cdot OM$.**
(Revista Axioma Ploieşti nr. 30 / 2009)

3. **Se consideră segmentul $[AB]$ de lungime $AB = n$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$ şi punctele $M_1, M_2, \ldots, M_n$, respectiv mijloacele segmentelor $[AM_1], [AM_2], \ldots, [AM_{n-1}]$. Determinaţi n ştiind că $AB + AM_1 + \ldots + AM_n = 35840$.**
(GMB nr. 9 /2014)

4. **Fie $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{2015}$ puncte coliniare în această ordine . Ştiind că $A_0A_1 = A_1A_2 = 1$ şi $A_kA_{k+1} = 2 \cdot A_{k-1}A_k$ pentru orice $k \geq 2$, să se calculeze lungimea segmentului A_0A_{2015} .**
(Etapa judeţeană Vrancea, 2003, GMB nr. 12 /2013)

5. **Fie segmentul $[AB]$ şi punctele $M, N \in (AB)$ astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{3}{2}$ şi $\frac{AN}{NB} = \frac{2}{3}$. Dacă P este mijlocul lui $[AB]$, aflaţi $\frac{AP}{PM}$ şi $\frac{AN}{NP}$.**

6. **Fie segmentul $[AB]$, $A \neq B$ şi 2015 puncte distincte situate în interiorul segmentului $[AB]$ care împart $[AB]$ în 2016 segmente . Punctului A i se asociază numărul 0 , iar puntului B i se asociază numărul 1 . Celor 2015 puncte li se asociază arbitrar unul din numerele 0 sau 1 . Să se arate că dintre cele 2016 segmente, un număr impar au extremităţile asociate cu acelaşi număr .**
(Olimpiadă, Manuela Prajea, RMT nr. 1 / 2008)

7. **Fie $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_n$ puncte coliniare în această ordine, astfel încât : $M_1M_2 = 9$, $M_2M_3 = 17$, $M_3M_4 = 33$, $M_4M_5 = 65, \ldots$**
   a) Aflaţi lungimea segmentului M_8M_9 ;
   b) Aflaţi $n \in \mathbf{N}$, dacă $M_1M_n = 8194$;
   c) Aflaţi lungimea segmentului M_2A, unde A este mijlocul segmentului M_7M_9.
(GMB nr. 1 /2012)

E) ***Recomandări pentru studiu :*** **problemele 5, 8, 20, 22, 23, 28, 29 - GEOMETRIE, CAPIT. 1, Artur Bălăucă** – *Olimpiade, concursuri şi centre de excelenţă* – clasa a VI-a, *Ed. Taida*

F) ***MATEMATICĂ RECREATIVĂ***

- Un tren care merge cu viteza de 54 km/h ajunge un călător care merge în acelaşi sens cu 6 km/h şi îl depăşeşte în 6 secunde . Aflaţi lungimea trenului . Aceeaşi întrebare pentru situaţia în care călătorul merge în sens contrar .
- Pe fiecare din laturile unui pătrat se consideră câte trei puncte (diferite de vârfuri) colorate : unul galben şi două roşii . Se notează cu M mulţimea celor 12 puncte colorate . Care este numărul segmentelor cu extremităţile din mulţimea M colorate la fel ?

Bibliografie

- **Artur Bălăucă** – *Olimpiade, concursuri şi centre de excelenţă* – clasa a VI-a, *Ed. Taida, 2013*
- **Petre Năchilă, C. Năchilă** – *Probleme de matematică pentru concursuri, Ed. Sigma, 2006*
- **Armand Martinov** – *Frumuseţe matematică, Ed. Sigma, 2011*
- **Colecţia Revistei matematice din Timişoara**
- **Colecţia Gazetei matematice seria B**
- **Colecţia RMI Constanţa**