Centrul de Excelenţă – Constanţa **Prof. Amelia-Elena Duca**

PUTERI

Clasa a V-a, 25 octombrie 2014

Partea I. Chestiuni pregătitoare

I. 1. Calculaţi valoarea numărului natural $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{2012} + 2^{2013}$.

Rezolvare: înmulţesc ambii membri ai egalităţii date cu 2 şi obţin:

$2S = 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{2013} + 2^{2014}$ (1)

$\underline{S = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{2012} + 2^{2013}}$ scăzând membru cu membru cele două egalităţi obţin egalitatea $S = 2^{2014} - 1$.

2. Fie numărul natural $S = 1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^{n-1} + a^n$, unde $a \in \mathbf{N}$ şi $a \geq 2$. Demonstraţi că $S = \dfrac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$.

Demonstraţie. Notez egalitatea din enunţ cu (1) şi înmulţind ambii membri ai acestei egalităţi cu a obţin:

$a \cdot S = a + a^2 + a^3 + ... + a^{n-1} + a^n + a^{n+1}$ (2)

$\underline{S = 1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^{n-1} + a^n}$ (1) scăzând membru cu membru egalităţile (2) şi (1) obţin egalitatea:

$a \cdot S - S = a^{n+1} - 1 \Leftrightarrow S(a-1) = a^{n+1} - 1 \Leftrightarrow S = \dfrac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$, q. e. d.

II. Pătrate perfecte. Cuburi perfecte

- Un număr natural este pătrat perfect dacă este egal cu puterea a doua a altui număr natural. *De exemplu*, numărul 64 este pătrat perfect, deoarece $64 = 8^2$.
- Un număr natural este cub perfect dacă este egal cu puterea a treia a altui număr natural. *De exemplu*, numărul 125 este cub perfect, deoarece $125 = 5^3$.

Ultima cifră a unui pătrat perfect

Se notează cu *u(n)* ultima cifră a numărului natural n.

Pentru un număr natural *n* avem că $u(n^2)$ este 0, 1, 4, 5, 6 sau 9.

Observaţie. Dacă ultima cifră a unui număr natural este 2, 3, 7 sau 8, atunci numărul nu este pătrat perfect.

Partea a II-a. Problemă rezolvată

a) Câte puteri ale numărului 2 se scriu cu patru cifre?

b) Fie n număr natural nenul. Arătaţi că există cel puţin trei puteri ale lui 2 care se scriu cu n cifre. ***(OJM 2012)***

Soluţie. **a)** Sunt 4 puteri: $2^{10}=1024,\ 2^{11}=2048,\ 2^{12}=4096,\ 2^{13}=8192$

b) Arătăm că există o putere a lui 2 cu n cifre. În caz contrar, există p număr natural astfel încât $2^p<10^{n-1}<10^n<2^{p+1}\Rightarrow 5\cdot 10^{n-1}<2^p<10^{n-1}$, fals.

Fie $a=2^m$ prima putere a lui 2 scrisă cu n cifre. Observăm că prima cifră a lui a este 1, altfel, dacă $a>2\cdot 10^{n-1}$, avem că $2^{n-1}=a:2>10^{n-1}$ este tot o putere a lui 2, mai mică decât a, scrisă tot cu n cifre.

$2^m=a<2\cdot 10^{n-1}<10^n$

$2^{m+1}=2a<4\cdot 10^{n-1}<10^n$

$2^{m+2}=4a<8\cdot 10^{n-1}<10^n$, rezultă că $2^m, 2^{m+1}, 2^{m+2}$ sunt trei puteri ale lui 2 scrise cu n cifre.

Partea a III-a. Probleme propuse şi temă

1. Fie numărul $n=\ 2+2\cdot 3+2\cdot 3^2+2\cdot 3^3+.......+2\cdot 3^{2014}$. Demonstrați că numărul $n+1$ nu este pătrat perfect.
2. Să se arate că nu există un număr natural nenul n astfel încât $1+3+5+7+...+(2n-1)=3^{2014}+2014$. ***(Concursul Interjudețean de matematică și Informatică ”Marian Țarină”, Turda, 2013)***
3. Fie $A=n^{2014}+(n+1)^{2014}+(n+2)^{2014}+...+(n+9)^{2014}$, unde n este un număr natural. Calculaţi restul împărţirii numărului lui A la 10. ***(GM 5/2012)***
4. Calculaţi ultimele două cifre ale câtului împărţirii numărului $7^{4n+1}+4\cdot 7^{4n}+17$ la 11.
5. Calculaţi ultimele trei cifre ale numărului $n=7+7^2+7^3+...+7^{2008}$
6. Comparaţi numerele: $A=2^0\cdot 2^1\cdot 2^2\cdot ...\cdot 2^{99}\cdot 26$ şi $B=3^{3302}-3^{3301}+21\cdot 9^{1650}$.
7. Demonstraţi că $3^{5001}+4^{4001}<7^{3001}$. ***(GM 9/2013)***
8. Fie $a=82^{22}$ şi $b=242^{14}$. Demonstraţi că $a>b$. ***(GM 9/2013)***
9. **a)** Calculaţi $S=5^2+5^3+5^4+5^5$

   b) Determinaţi ultimele trei cifre ale numărului $A=1+5+5^2+5^3+...+5^{2013}$.
10. Fie $a=1+2+2^2+2^3+...+2^{2007}$ şi $b=1+3+3^2+3^3+...+3^{2007}$. Comparaţi $(a+1)^3$ cu $(2b+1)^3$.
11. Demonstraţi că există o infinitate de pătrate perfecte de forma $2^m+2^n+2^{2p}$, unde m, n, p sunt numere naturale. ***(GM 6/2011)***
12. Demonstraţi că numărul 19^n, unde n este un număr natural nenul, se poate scrie ca suma a trei pătrate perfecte nenule.
13. **a)** Să se arate că numărul $A=\underbrace{111...11}_{3k\ cifre}$ este divizibil cu 37.

    b) Demonstraţi că pentru orice număr natural n, resturile împărţirii lui 10^n-1 la 37 sunt pătrate perfecte. (OJM Constanţa, 2004)
14. Câte cifre are numărul 2^{90}, la scrierea sa în baza zece? ***(OJM Constanţa 2010)***

15. Demonstraţi că numărul $a = 13 + 2^{2013}$ este multiplu al lui 7. ***(GM 9/2013)***

16. Care sunt ultimele trei cifre ale numerelor 2005^{2012} şi 2005^{2013}? ***(GM 11/2012)***

17. Calculaţi ultimele două cifre ale numărului 9^{999}.

18. Calculaţi ultimele patru ciftre ale numărului $n = 2\cdot 8^{672} - 2\cdot 4^{1005} - 2^{2010}$.

19. Demonstraţi că pentru orice număr natural impar *n*, numărul $A = 2^n + 3^n + 7^n + 8^n$ este multiplu al lui 5.

20. Comparați numerele 128^{11} şi 65^{13}.

21. Să se compare numerele 3^{2n+7} şi 2^{3n+11}.

22. Fie numerele $a = (4^{10} - 4^9)(4^9 - 4^8)\cdot\ldots\cdot(4^2 - 4^1)$ şi $b = 3\cdot 2^{90}\cdot 81^2$. Comparaţi cele două numere.

23. Fie numărul $A = 1 + 9 + 9^2 + 9^3 + \ldots + 9^{2011}$.

- **a)** Calculaţi cifra unităţilor numărului *A*;
- **b)** Calculaţi cifra zecilor numărului *A*;
- **c)** Demonstraţi că numărul *A* nu este pătrat perfect.

24. Demonstraţi că numărul $a = 5^{n^2-n+2}$ este o sumă de două pătrate perfecte, oricare ar fi *n* număr natural. ***(GM 11/2012)***

25. Fie numărul $a = 2007^{2007} + 2008^{2008} + 2009^{2009} + 2010^{2010}$. Poate fi *a* pătrat perfect?

26. Scrieți numărul 9^{2011} ca suma a două cuburi perfecte. ***(GM 11/2011)***

27. Scrieţi numărul 6^{2012} ca sumă dintre un pătrat perfect şi un cub perfect. ***(GM5/2012)***

28. Demonstraţi că numărul 10^{2015} se poate scrie ca sumă a patru cuburi perfecte.

29. Pentru orice *n* număr natural, calculaţi restul împărţirii numărului $A = 5^{n+4}\cdot 3^{n+1} + 5^{n+1}\cdot 3^{n+3} + 3\cdot 15^n$ la 2013.

30. Calculaţi valoarea numărului natural *n* pentru care $\left(n\cdot n^5\cdot n^{5^2}\cdot n^{5^3}\cdot\ldots n^{5^{2010}}\right)^4 = 5^{5^{2011}} : \left(1^5 + 5^0 + 5^{0^{2011}} + 2011^{0^5}\right)$.