Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinaţi partea reală a numărului complex $z = 1 + 2i + 3i^2$.

5p **2.** Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x - 1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = 3x - 5$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x^2 - x} = 3^{2x}$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale pare, de două cifre, se pot forma cu cifrele 0, 1, 2 și 3.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră vectorii $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ și $\overrightarrow{AC} = (m+1)\vec{i} + 4\vec{j}$, unde m este număr real. Determinaţi numărul real m știind că $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB = AC = 3$ și $BC = 3\sqrt{2}$. Determinați $\cos C$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 2x^2 - 2x & 4x & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det(A(0)) = 1$.

5p **b)** Arătaţi că $A(x+y) = A(x)\cdot A(y)$ pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale x știind că $A(x^2+2) = A(x)\cdot A(x)\cdot A(x)$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 3X^2 + aX - 2$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $f(2) = 2(a-3)$.

5p **b)** Determinaţi numărul real a ştiind că polinomul f este divizibil prin $X^2 - X + 1$.

5p **c)** Pentru $a = 3$, rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $f(2^x) = 0$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{xe^x}{x+2}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x) = \dfrac{(x^2+2x+2)e^x}{(x+2)^2}$, $x\in(-2,+\infty)$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0 = 0$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Arătaţi că ecuaţia $f(x) = 1$ are cel puțin o soluţie în intervalul $(1,2)$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \dfrac{x^n}{1+x^n}dx$.

5p **a)** Arătaţi că $I_1 = 1 - \ln 2$.

5p **b)** Arătaţi că $I_{n+1} \le I_n$ pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z=-2+2i$	**2p**
	Partea reală a numărului z este egală cu -2	**3p**
2.	$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x-1=3x-5$	**3p**
	$x=2$ și $y=1$	**2p**
3.	$x^2-x=2x\Leftrightarrow x^2-3x=0$	**3p**
	$x_1=0$ și $x_2=3$	**2p**
4.	Cifra unităților poate fi 0 sau 2	**2p**
	Cifra zecilor poate fi aleasă în câte 3 moduri, deci se pot forma $3\cdot 2=6$ numere	**3p**
5.	$(m+1)\vec{i}+4\vec{j}=2\left(3\vec{i}+2\vec{j}\right)$	**2p**
	$m=5$	**3p**
6.	ΔABC este dreptunghic isoscel	**3p**
	$\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(0))=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1+0+0-0-0-0=1$	**3p**
b)	$A(x+y)=\begin{pmatrix}1&0&0\\x+y&1&0\\2(x+y)^2-2(x+y)&4(x+y)&1\end{pmatrix}$	**2p**
	$A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}1&0&0\\x+y&1&0\\2x^2+4xy+2y^2-2x-2y&4x+4y&1\end{pmatrix}=A(x+y)$ pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$A(x)\cdot A(x)\cdot A(x)=A(3x)$	**2p**
	$x^2+2=3x\Rightarrow x_1=1$ și $x_2=2$	**3p**
2.a)	$f(2)=2^3-3\cdot 2^2+a\cdot 2-2=$	**2p**
	$=2a-6=2(a-3)$	**3p**
b)	$f=(X-2)\left(X^2-X+1\right)+(a-3)X$	**3p**
	$a=3$	**2p**

c)	$f=(X-2)(X^2-X+1)$	**2p**
	$(2^x-2)(2^{2x}-2^x+1)=0 \Leftrightarrow x=1$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(xe^x)'\cdot(x+2)-xe^x\cdot(x+2)'}{(x+2)^2}=$	**2p**
	$=\dfrac{(e^x+xe^x)\cdot(x+2)-xe^x}{(x+2)^2}=\dfrac{(x^2+2x+2)e^x}{(x+2)^2},\ x\in(-2,+\infty)$	**3p**
b)	$y-f(0)=f'(0)(x-0)$	**2p**
	$f(0)=0$, $f'(0)=\dfrac{1}{2}$, deci ecuaţia tangentei este $y=\dfrac{1}{2}x$	**3p**
c)	Funcţia $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-1$ este continuă pe $[1,2]$	**2p**
	$g(1)\cdot g(2)=\dfrac{e-3}{3}\cdot\dfrac{e^2-2}{2}<0$, deci există $c\in(1,2)$ astfel încât $g(c)=0$, adică $f(c)=1$	**3p**
2.a)	$I_1=\int_0^1\dfrac{x}{1+x}dx=\int_0^1\left(1-\dfrac{1}{1+x}\right)dx=$	**2p**
	$=x\Big\vert_0^1-\ln(1+x)\Big\vert_0^1=1-\ln 2$	**3p**
b)	$I_{n+1}-I_n=\int_0^1 x^n\left(\dfrac{x}{1+x^{n+1}}-\dfrac{1}{1+x^n}\right)dx=\int_0^1\dfrac{x^n(x-1)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})}dx$	**2p**
	Pentru orice $x\in[0,1]$ avem $x-1\le 0$, $x^n\ge 0$, $1+x^n>0$ şi $1+x^{n+1}>0$, deci $I_{n+1}-I_n\le 0$	**3p**
c)	Pentru orice $x\in[0,1]$ şi orice $n\in\mathbb{N}^*$ avem $0\le\dfrac{x^n}{1+x^n}\le x^n$	**2p**
	$0\le\int_0^1\dfrac{x^n}{1+x^n}dx\le\int_0^1 x^n dx\Rightarrow 0\le I_n\le\dfrac{1}{n+1}$, deci $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$	**3p**