# Examenul de bacalaureat naţional 2014
## Proba E. c)
## Matematică *M_mate-info*

**Varianta 3**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

**5p** **1.** Se consideră numărul complex $z=1+i$. Calculaţi $z^2$.

**5p** **2.** Arătaţi că parabola asociată funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+6$ **nu** intersectează axa $Ox$.

**5p** **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(2x-3)=\log_2(x+1)$.

**5p** **4.** Calculaţi probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie impar.

**5p** **5.** În triunghiul $ABC$ punctele $M$, $N$ şi $P$ sunt mijloacele laturilor $AB$, $BC$ şi, respectiv, $AC$. Arătaţi că $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$.

**5p** **6.** Ştiind că $\operatorname{tg} a=\sqrt{3}$ şi $a\in\mathbb{R}$, arătaţi că $\dfrac{\sin a-\cos a}{\cos a+\sin a}=2-\sqrt{3}$.

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & 2\\ 1 & 2 & a\end{pmatrix}$, unde $a$ este număr real.

**5p** **a)** Arătaţi că $\det\big(A(1)\big)=-1$.

**5p** **b)** Determinaţi numerele reale $m$ ştiind că $\det\big(A(m)\big)=0$.

**5p** **c)** Determinaţi numerele reale $a$ astfel încât $A(a)\cdot A(a)-A\left(a^2\right)=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 5 & -5\\ 1 & -5 & 5\end{pmatrix}$.

**2.** Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=3x+3y-xy-6$.

**5p** **a)** Calculaţi $1*3$.

**5p** **b)** Arătaţi că $x*y=3-(x-3)(y-3)$ pentru orice numere reale $x$ şi $y$.

**5p** **c)** Determinaţi numerele reale $x$ pentru care $\underbrace{x*x*\ldots*x}_{x\text{ de }2014\text{ ori}}=x$.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4x+5}$.

**5p** **a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{(1-x)(x-3)}{\left(x^2-4x+5\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei $f$.

**5p** **c)** Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei $f$.

**2.** Pentru fiecare număr natural nenul $n$ se consideră numărul $I_n=\displaystyle\int_1^e x\ln^n x\,dx$.

**5p** **a)** Arătaţi că $I_1=\dfrac{e^2+1}{4}$.

**5p** **b)** Arătaţi că $I_{n+1}\le I_n$ pentru orice număr natural nenul $n$.

**5p** **c)** Demonstraţi că $2I_{n+1}+(n+1)I_n=e^2$ pentru orice număr natural nenul $n$.

**Examenul de bacalaureat național 2014**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_mate-info***
**Barem de evaluare şi de notare**

**Varianta 3**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $z^2=(1+i)^2=1+2i+i^2=$ | **2p** |
| | $=2i$ | **3p** |
| **2.** | $\Delta=16-24=-8$ | **3p** |
| | $\Delta<0$, deci parabola asociată funcției $f$ **nu** intersectează axa $Ox$ | **2p** |
| **3.** | $2x-3=x+1$ | **2p** |
| | $x=4$ care verifică ecuația | **3p** |
| **4.** | Sunt 45 de numere impare de două cifre, deci sunt 45 de cazuri favorabile | **2p** |
| | Sunt 90 de numere de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile | **1p** |
| | $p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{45}{90}=\dfrac{1}{2}$ | **2p** |
| **5.** | $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CA}=$ | **2p** |
| | $=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)=\vec{0}$ | **3p** |
| **6.** | $\dfrac{\sin a-\cos a}{\cos a+\sin a}=\dfrac{\cos a\left(\dfrac{\sin a}{\cos a}-1\right)}{\cos a\left(1+\dfrac{\sin a}{\cos a}\right)}=\dfrac{\text{tg}a-1}{1+\text{tg}a}=$ | **3p** |
| | $=\dfrac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$ | **2p** |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $\det(A(1))=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&2&1\end{vmatrix}=$ | **2p** |
| | $=1+2+2-1-4-1=-1$ | **3p** |
| **b)** | $\det(A(m))=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&m&2\\1&2&m\end{vmatrix}=m^2-2m$ | **3p** |
| | $m^2-2m=0\Leftrightarrow m_1=0$ și $m_2=2$ | **2p** |
| **c)** | $A(a)\cdot A(a)=\begin{pmatrix}3&a+3&a+3\\a+3&a^2+5&4a+1\\a+3&4a+1&a^2+5\end{pmatrix}$, $A(a^2)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a^2&2\\1&2&a^2\end{pmatrix}$ | **3p** |
| | $\begin{pmatrix}2&a+2&a+2\\a+2&5&4a-1\\a+2&4a-1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&5&-5\\1&-5&5\end{pmatrix}\Leftrightarrow a=-1$ | **2p** |

| | | |
|---|---|---|
| **2.a)** | $1*3=3\cdot 1+3\cdot 3-1\cdot 3-6=$ | **3p** |
| | $=3$ | **2p** |
| **b)** | $x*y=3-xy+3x+3y-9=$ | **2p** |
| | $=3-x(y-3)+3(y-3)=3-(x-3)(y-3)$ pentru orice numere reale $x$ şi $y$ | **3p** |
| **c)** | $3-(x-3)^{2014}=x$ | **3p** |
| | $x_1=3$ şi $x_2=2$ | **2p** |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $f'(x)=\dfrac{(x-2)'(x^2-4x+5)-(x-2)(x^2-4x+5)'}{(x^2-4x+5)^2}=$ | **2p** |
| | $=\dfrac{-x^2+4x-3}{(x^2-4x+5)^2}=\dfrac{(1-x)(x-3)}{(x^2-4x+5)^2}$, $x\in\mathbb{R}$ | **3p** |
| **b)** | $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x^2-4x+5}=0$ | **3p** |
| | Dreapta de ecuaţie $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcţiei $f$ | **2p** |
| **c)** | $f'(x)=0\Leftrightarrow x_1=1$ şi $x_2=3$ | **2p** |
| | $f'(x)\le 0$ pentru orice $x\in(-\infty,1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty,1]$ | **1p** |
| | $f'(x)\ge 0$ pentru orice $x\in[1,3]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[1,3]$ | **1p** |
| | $f'(x)\le 0$ pentru orice $x\in[3,+\infty)\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[3,+\infty)$ | **1p** |
| **2.a)** | $I_1=\int_1^e x\ln x\,dx=\dfrac{x^2}{2}\ln x\Big\vert_1^e-\dfrac{1}{2}\int_1^e x\,dx=$ | **3p** |
| | $=\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{e^2}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{e^2+1}{4}$ | **2p** |
| **b)** | $I_{n+1}-I_n=\int_1^e x(\ln x-1)\ln^n x\,dx$ | **2p** |
| | Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ şi $x\in[1,e]$ avem $\ln x\ge 0$ şi $\ln x-1\le 0\Rightarrow I_{n+1}\le I_n$ | **3p** |
| **c)** | $I_{n+1}=\int_1^e x\ln^{n+1}x\,dx=\dfrac{x^2}{2}\ln^{n+1}x\Big\vert_1^e-\int_1^e\dfrac{x^2}{2}\cdot\dfrac{1}{x}(n+1)\ln^n x\,dx=$ | **3p** |
| | $=\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{n+1}{2}\int_1^e x\ln^n x\,dx\Rightarrow 2I_{n+1}+(n+1)I_n=e^2$ pentru orice număr natural nenul $n$ | **2p** |