Concurs RMCS , ediţia a IX a, 14 iunie 2014, Oţelu – Roşu

Clasa a VII a

1. Determinaţi numerele întregi a şi b pentru care $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{ab}=4$.

Adriana şi Lucian Dragomir, RMCS 2008

2. Arătaţi că pentru orice număr natural nenul n este adevărată inegalitatea

$$n\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right)\geq(n+1)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n+1}\right).$$

Lucian Dragomir

3. Pe laturile (AB) şi (AC) ale unui triunghi ABC se consideră punctele P, respectiv Q astfel încât $AP=2PB$ şi $AQ=QC$. Arătaţi că dacă $CP=2PQ$, atunci triunghiul ABC este dreptunghic.

ViitoriOlimpici.ro 2013

4. O mulţime cu trei elemente, numere naturale distincte, se numeşte *aritmetică* dacă unul dintre elementele sale este media aritmetică a celorlalte două.

Considerând mulţimea $A_n=\{1,2,3,...,n\}$ ($n\in\mathbb{N}, n\geq 3$), se notează cu a_n numărul submulţimilor *aritmetice* ale lui A_n.

a) Calculaţi a_{10}.

b) Determinaţi cel mai mic număr natural n pentru care $a_n>2014$.

Lucian Dragomir

Notă: Timp de lucru : **trei ore.**
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se notează cu maxim 7 puncte.