Concurs RMCS , ediţia a IX a, 14 iunie 2014, Oţelu – Roşu

Clasa a VIII a

1. Pentru orice numere întregi x şi y se notează $A(x,y)=x^2+4y$ şi $B(x,y)=y^2+4x$.

a) Determinaţi perechile (p,q) de numere întregi pentru care $A(p,q)+B(p,q)=10$.

b) Arătaţi că nu există nicio pereche (m,n) de numere naturale nenule pentru care $A(m,n)$ şi $B(m,n)$ sunt simultan pătrate perfecte.

ViitoriOlimpici.ro

2. Se consideră un tetraedru regulat *ABCD* cu lungimea muchiei egală cu 3 şi punctele $P\in BD, M\in(BC)$ astfel încât *B* este mijlocul lui (PD) şi $BC=3\cdot BM$.

a) Notând $MP\cap(CD)=\{N\}$, calculaţi volumul piramidei *AMNC.*

b) Arătaţi că dacă pe suprafaţa tetraedrului *ABCD* se consideră 37 de puncte, atunci există printre acestea cel puţin două astfel încât distanţa dintre ele este cel mult egală cu 1.

RMCS 2010, enunţ modificat

3. Determinaţi numerele naturale nenule *n* pentru care $\dfrac{n+2014}{\left[\sqrt{n}\right]}$ şi $\dfrac{n+2013}{\left[\sqrt{n+1}\right]}$ sunt numere naturale. ($[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real *a*)

Lucian Dragomir, GM 12,2012

4. Se consideră mulţimea cu patru elemente $A=\{4,15,24,m\}$, unde *m* este un număr natural. Arătaţi că există $n,p\in A, n\neq p$, astfel încât numărul $n+p-3$ nu este pătrat perfect.

Lucian Dragomir, ViitoriOlimpici.ro

Notă: Timp de lucru : **trei ore.**
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se notează cu maxim 7 puncte.