Concurs RMCS , ediţia a IX a, 14 iunie 2014, Oţelu – Roşu

Clasa a IX a

1. Determinaţi numerele reale x pentru care $x \cdot [x] = x + 2$.

($[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.)

RMCS 2012

2. Arătaţi că pentru orice număr natural $n \geq 2$ există numerele naturale distincte $a_1, a_2, ..., a_n$ astfel încât $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} = \frac{9}{16}$.

Supliment GM 3/2014

3. Determinaţi numerele reale m pentru care soluţiile ecuaţiei

$(m+1)x^2 - (4m+2)x + 5m - 1 = 0$ sunt numere întregi.

* * *

4. Se consideră un triunghi ABC înscris într-un cerc de centru O. Dacă M, N, P sunt simetricele lui O faţă de BC, CA respectiv AB, demonstraţi că dreptele AM, BN, CP sunt concurente.

* * *

Notă: Timp de lucru : **trei ore.**

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se notează cu maxim 7 puncte.

Concurs RMCS, ediţia a IX a, 14 iunie 2014
Barem de corectare şi notare, Clasa a IX a

1. Notăm $[x]=k\in\mathbb{Z},\{x\}=\alpha\in[0,1)$ şi astfel ajungem la $k^2+(a-1)k-a-2=0$. Această ecuaţie de gradul al doilea în k are discriminantul $\Delta=a^2+2a+9$; o condiţie necesară pentru $k\in\mathbb{Z}$ este ca Δ să fie pătrat perfect.	3p
Cum $9\le a^2+2a+9<12$, deducem $\Delta=9\Rightarrow a=0$. Imediat se ajunge la $k\in\{-1;2\}$ şi $x\in\{-1;2\}$.	4p
Metoda a II-a. Evident, 0 nu este soluţie a ecuaţiei. Din $[x]=\frac{x+2}{x}=1+\frac{2}{x}\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=\frac{2}{k},k\in\mathbb{Z}$. Pentru $k\ge3$ ecuaţia conduce la $0=\frac{2}{k}+3$, absurd; pentru $k\le-3$ avem $x\cdot[x]>0$ şi $x+2<0$, deci nu avem soluţii. Avem aşadar de analizat doar $k\in\{-2,-1,1,2\}$. Se ajunge imediat la $x\in\{-1;2\}$.	
2. pentru $n=2$ se obţin imediat $a_1=2\ne a_2=16$ deoarece $\frac{9}{16}=\frac{1}{2}+\frac{1}{16}$ (*)	3p
Presupunând că există $a_1,a_2,...,a_k$ pentru care $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_k}=\frac{9}{16}$, înmulţind această egalitate cu $\frac{1}{9}$, se ajunge la $\frac{1}{9a_1}+\frac{1}{9a_2}+...+\frac{1}{9a_k}=\frac{1}{16}$. Adunăm în fiecare membru $\frac{1}{2}$ şi folosim observaţia (*). Deducem astfel că există $b_1=9a_1,b_2=9a_2,...,b_k=9a_k,b_{k+1}=2$, toate distincte (!), pentru care $\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+...+\frac{1}{b_{k+1}}=\frac{9}{16}$ şi astfel demonstraţia prin inducţie se încheie.	4p
3. Relaţiile lui Viete conduc la $x_1+x_2=4-\frac{2}{m+1},x_1x_2=5-\frac{6}{m+1}$	1p
Se obţine imediat relaţia $3x_1+3x_2-x_1x_2=7$	2p
de unde $(3-x_1)(3-x_2)=2$	2p
Cum soluţiile sunt întregi, obţinem imediat $x_1=1,x_2=2$ sau $x_1=4,x_2=5$	1p
Corespunzător se ajunge la $m=1$, respectiv $m=-\frac{7}{5}$ (nu se specifică în enunţ că şi *m* este întreg !!!)	1p
4. $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC},\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$	3p
Dacă *D, E, F* sunt mijloacele segmentelor *(AM), (BN), (CP),* atunci avem $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OM}\right)$ şi analoagele;	2p
În final avem $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$, aşadar *D, E, F* coincid şi deci *AM, BN, CP* sunt concurente în *D.*	2p