Concurs RMCS , ediţia a IX a, 14 iunie 2014, Oţelu – Roşu

Clasa a X a

1. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\cos^2 x + 4\sin x \cos x - 2\sin^2 x = 2$.

RMCS 37

2. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_x(1-x) + \log_2 \dfrac{1-x}{x} = \left(\log_2 x\right)^2$.

Supliment GM, 3/2014

3. Se consideră o mulţime M de numere complexe care are următoarele proprietăţi:

a) $1 \in M$.

b) $x \in M \cap \mathbb{R} \Rightarrow (\cos x + i \cdot \sin x) \in M$.

c) $(\cos 2x + i \cdot \sin 2x) \in M \Rightarrow x \in M$.

Demonstraţi că pentru orice număr natural *n*, este adevărată relaţia $\dfrac{\pi}{2^n} \in M$.

Lucian Dragomir, RMT, enunţ modificat

4. Se notează cu F_n numărul funcţiilor $f:\{1,2,3,...,n\} \to \{n+1, n+2\}$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ care au proprietatea că $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(n)$ este număr par .

a) Să se determine F_5 .

b) Să se determine cel mai mic număr natural n pentru care $F_n > 2014$

Lucian Dragomir,Supliment GM 12/2011

Notă: Timp de lucru : **trei ore.**
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se notează cu maxim 7 puncte.

Concurs RMCS, ediţia a IX a, 14 iunie 2014
Barem de corectare şi notare, Clasa a X a

1. Notăm $a=\log_2 x, b=\log_x(1-x)$ şi obţinem $b+ab-a=a^2$	3p
sau $(1+a)(b-a)=0$;	1p
Dacă $a=-1$ atunci $x=\dfrac{1}{2}$	1p
Dacă $a=b$ atunci $\log_2 x=\log_x(1-x)$, absurd deoarece $x\in(0,1)\Rightarrow a<0, b>0$.	2p
2. Membrul drept este egal cu $2\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)$ şi astfel ecuaţia se poate scrie $4\sin^2 x-4\sin x\cos x+\cos^2 x=0$.	3p
Dacă $\cos x=0\Rightarrow \sin x=0$, absurd, aşadar prin împărţire cu $\cos x\neq 0$ obţinem $4tg^2 x-4tgx+1=0\Rightarrow tgx=\dfrac{1}{2}$ şi astfel $x\in\left\{arctg\dfrac{1}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$	4p
3. $\cos 0+i\sin 0=1\in M\overset{c)}{\Rightarrow}0\in M$	1p
$\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1\in M\overset{c)}{\Rightarrow}\pi\in M\overset{b)}{\Rightarrow}-1\in M$; cum şi $1\in M$, avem că $\{-1,0,1\}\subset M\cap\mathbb{Z}$	2p
Demonstrăm prin inducţie matematică afirmaţia: $\dfrac{\pi}{2^n}\in M, \forall n\in\mathbb{N}$ Pentru $n=0$ am arătat anterior că $\pi\in M$	1p
Presupunând că , pentru un oarecare $k\in\mathbb{N}$, avem $\dfrac{\pi}{2^k}\in M$, atunci ajungem la $\left(\cos\dfrac{\pi}{2^k}+i\cdot\sin\dfrac{\pi}{2^k}\right)\in M$ (conform b)); aceasta se poate rescrie $\left(\cos 2\cdot\dfrac{\pi}{2^{k+1}}+i\cdot\sin 2\cdot\dfrac{\pi}{2^{k+1}}\right)\in M$ şi, conform c) , avem că $\dfrac{\pi}{2^{k+1}}\in M$. Cu aceasta, demonstraţia prin inducţie este încheiată.	3p
4.	
a) Evident , $n+1$ şi $n+2$ sunt de parităţi diferite şi astfel distingem cazurile : a) toate numerele $f(k), k=\overline{1,5}$ sunt pare ...... avem deci o funcţie b) unul dintre *f (k)* este par , restul sunt impare (fiind în număr par ,acestea au suma un număr par) .... avem 5 astfel de funcţii c) trei dintre *f(k)* sunt pare , celelalte două sunt impare;două elemente din cinci se pot alege în $\dfrac{5\cdot 4}{2}$ feluri .... avem aici 10 funcţii În total deci $F_5=1+5+10=16$	4 p
b) Dacă n este impar , avem din nou mai multe posibilităţi : unul dintre numerele *f(k)* este par sau trei sunt pare sau cinci sunt pare ... sau toate sunt pare . Suma totală reprezintă de fapt numărul submulţimilor cu 1 element , cu 3 elemente , ... , ale unei mulţimi cu n elemente (n impar) , adică $\dfrac{2^n}{2}=2^{n-1}$ (Un raţionament analog dacă n este par) Din $2^{n-1}>2014$ deducem $n-1\geq 11$ şi astfel numărul cerut este $n=12$.	3p