Concurs RMCS , ediţia a IX a, 14 iunie 2014, Oţelu – Roşu

Clasa a XI a

1. Arătaţi că, dacă $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi există $n \in \mathbb{Z}$ astfel încât $\det(A - I_2) = n$ şi $\det(A + I_2) = n + 2$, atunci $\det(A - n \cdot I_2)$ este pătratul unui număr întreg.

Ovidiu Bădescu

2. Se consideră un şir $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $x_1 > 0,\ x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{1 + x_n^{\,2}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Calculaţi $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$ şi $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x_n}{\sqrt{n}}$.

Supliment GM 12/2011

3. Determinaţi funcţiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f(x^3) - f(y^3) = (x^2 + f(xy) + y^2) \cdot f(x - y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Lucian Dragomir, Supliment GM 2013

4. Se consideră o funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi pentru care există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \neq f'(c)$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$. Demonstraţi că $f''(c) = 0$.

Bogdan Enescu

Notă: Timp de lucru : **trei ore.**
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se notează cu maxim 7 puncte.

Concurs RMCS, ediţia a IX a, 14 iunie 2014
Barem de corectare şi notare, Clasa a XI a

1. Se ştie că $f(x)=\det\left(A-x\cdot I_2\right)=x^2-(trA)\cdot x+\det A.$ Avem astfel, conform ipotezei, $f(1)=1-(trA)+\det A=n$ şi $f(-1)=1+(trA)+\det A=n+2.$	3 p
Deducem imediat că $\det A=n$ şi $trA=1.$	2p
Se ajunge acum la $\det\left(A-n\cdot I_2\right)=f(n)=n^2-n+n=n^2.$	2p
2. Se arată imediat că $x_n>0,\forall n\ge 1;$ urmează $x_{n+1}-x_n=\dfrac{1}{1+x_n^{\ 2}}>0,\forall n\in\mathbb{N}^*$, aşadar şirul este strict crescător. Dacă şirul este mărginit (superior), atunci (Weierstrass) şirul este convergent, adică are limită finită ; notând, de exemplu, această limită cu x, prin trecere la limită în relaţia de recurenţă, obţinem $x=x+\dfrac{1}{1+x^2}$, imposibil în mulţimea numerelor reale. Deducem că $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty.$	4p
Cea de-a doua limită propusă se situează în cazul exceptat $\dfrac{\infty}{\infty}$; încercăm o abordare folosind criteriul Cesaro – Stolz, pentru a determina $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n^{\ 2}}{n}$. Avem astfel $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}^{\ 2}-x_n^{\ 2}}{n+1-n}=...=0$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n^{\ 2}}{n}=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{\sqrt{n}}=0.$	3p
3. pentru $x=y\Rightarrow 0=(2x^2+f(x^2))\cdot f(0),\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(0)=0$	1p
Pentru $y=0$ se ajunge la $f(x^3)=x^2\cdot f(x),\forall x\in\mathbb{R}$; pentru $x\ne 0$ avem astfel $\dfrac{f(x^3)}{x^3}=\dfrac{f(x)}{x},\forall x\in\mathbb{R}^*$. Funcţia $g:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ are deci proprietatea că $g(x)=g(x^3),\forall x\in\mathbb{R}^*$	3p
Folosim succesiv transformarea $x\to x^{\frac{1}{3}}$ şi deducem că $g(x)=...=g(x^{\frac{1}{3^n}}),\forall x\in\mathbb{R}^*$; pentru $x>0$, cum *g* este continuă, avem: $\lim\limits_{n\to\infty}g(x)=...=g(1)$; pentru $x<0$ analog, aşadar $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}=A$ (constant), $\forall x\in\mathbb{R}^*$, deci $f(x)=Ax,\forall x\ne 0$. Cum $f(0)=0$ şi *f* este continuă, avem $f(x)=Ax,\forall x\in\mathbb{R}$	2p
Înlocuind în ecuaţia funcţională din enunţ, se ajunge la $A=\pm 1$, concluzia fiind imediată.	1p
4. Relaţia din enunţ poate fi scrisă sub forma $f(a)-f'(c)\cdot a\ne f(b)-f'(c)\cdot b$, oricare ar fi numerele reale diferite *a* şi *b*, aşadar funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},g(x)=f(x)-f'(c)\cdot x$ este injectivă	4p
Deoarece funcţia este şi continuă, deducem că este strict monotonă, aşadar $g'(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$ sau $g'(x)\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$, adică $f'(x)\ge f'(c),\forall x\in\mathbb{R}$ sau $f'(x)\le f'(c),\forall x\in\mathbb{R}$, prin urmare $x=c$ este punct de extrem global al funcţiei f', de unde, conform Teoremei lui Fermat, concluzia este imediată.	3p