Concurs RMCS , ediţia a IX a, 14 iunie 2014, Oţelu – Roşu

Clasa a XII a

1. Se consideră polinomul $f_m(X) = X^4 - 4X + m \in \mathbb{R}[X]$ şi se notează cu x_1, x_2, x_3, x_4 rădăcinile sale.

a) Arătaţi că, pentru $m = 1$, numărul $A = \left(1 - \frac{1}{x_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x_2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x_3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x_4}\right)$ este întreg.

b) Determinaţi numărul de rădăcini reale ale polinomului f_1.

c) Demonstraţi că dacă $m \in (0,3)$, atunci polinomul f_m nu are rădăcini întregi.

GM 3/2014, enunţ modificat

2. Pentru fiecare număr natural $n \geq 3$ se consideră mulţimea $A_n = \left\{a \in \mathbb{Z}_n \,/\, a^2 + \hat{2} = a\right\}$.

a) Arătaţi că există $n \geq 3$ pentru care $A_n \neq \varnothing$.

b) Demonstraţi că dacă $x \in A_n$, atunci $(\hat{1} - x) \in A_n$.

c) Determinaţi numărul natural *n* pentru care A_n are un singur element.

RMT enunţ modificat

3. Se consideră şirul $(I_n)_{n \geq 1}$ definit prin $A_n = \int_1^2 \left((x-1)(2-x)\right)^n dx$.

a) Arătaţi că $2(2n+1) \cdot A_n = n \cdot A_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

b) Calculaţi $\lim\limits_{n \to \infty} A_n$

Variantă bacalaureat 2008

4. Se notează $L_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1 + x^{2n}} dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Arătaţi că $L_2 \leq \ln \sqrt{2}$.

b) Demonstraţi că $\operatorname{arctg} x \leq x$ pentru orice $x \in [0, +\infty)$.

c) Calculaţi $\lim\limits_{n \to \infty} n \cdot L_n$.

Lucian Dragomir, RMT, enunţ modificat

Notă: Timp de lucru : **trei ore.**
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se notează cu maxim 7 puncte.

Concurs RMCS, ediţia a IX a, 14 iunie 2014
Barem de corectare şi notare, Clasa a XII a

1.	
a) $A=\dfrac{f(1)}{x_1x_2x_3x_4}=\dfrac{m-3}{m}=-2\in\mathbb{Z}$	
b) $\sum_{k=1}^{4}{x_k}^2=0$, aşadar nu toate rădăcinile sunt reale; (dacă ar fi reale ar trebui să avem $x_k=0,\forall k=\overline{1,4}$, absurd).	
Cel mult două rădăcini sunt reale; cum $f_1(0)>0$ şi $f_1(1)<0$, deducem că f_1 are cel puţin o rădăcină reală, situată în intervalul $(0,1)$	
f_1 are două rădăcini reale	
c) $f^/(x)=4x^3-4$ şi $x=1$ este singura soluţie a ecuaţiei $f^/(x)=0$; deoarece, de exemplu, $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ şi $x_3,x_4\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ şi $f_m(0)=m>0, f_m(1)=m-3<0, f_m(2)=m+8>0\Rightarrow x_1\in(0,1), x_2\in(1,2)$, aşadar $x_1,x_2\notin\mathbb{Z}$	
2. a) de exemplu, $\hat{2}\in A_4$	2p
b) $x\in A_n\Rightarrow(\hat{1}-x)^2+\hat{2}=\hat{1}-\hat{2}x+x^2+\hat{2}=\hat{1}-\hat{2}x+x-\hat{2}+\hat{2}=\hat{1}-x$, aşadar $\hat{1}-x\in A_n$	2p
c) folosind b) , condiţia din enunţ conduce la $x=\hat{1}-x\Rightarrow\overline{2x-1}=\hat{0}$	1p
de unde $\hat{4}x^2-\hat{4}x+\hat{1}=\hat{0}$ sau $\hat{4}x^2-\hat{4}x^2-\hat{8}+\hat{1}=\hat{0}$,aşadar $\hat{7}=\hat{0}$; în concluzie $n=7$	1p
Verificări imediate conduc la $A_7=\{\hat{4}\}$	1p
3. a) $A_n=\int_1^2(-x^2+3x-2)^n dx=\dfrac{1}{2}\int_1^2(2x-3)^/(-x^2+3x-2)^n dx=$ $=\dfrac{1}{2}(2x-3)(-x^2+3x-2)^n\Big/_1^2+\dfrac{n}{2}\int_1^2(2x-3)^2(-x^2+3x-2)^{n-1}dx=$ $=0+\dfrac{n}{2}\int_1^2[4(x^2-3x+2)+1](-x^2+3x-2)^{n-1}dx=-2nA_n+\dfrac{n}{2}A_{n-1}$, concluzia fiind imediată	4p
b) din a) avem $A_n=\dfrac{n}{4n+2}A_{n-1}<\dfrac{1}{4}A_{n-1}$; inductiv se arată că $0<A_n<\dfrac{1}{4^{n-1}}A_1$ cu citeriul cleştelui deducem că $\lim_{n\to\infty}A_n=0$	3p
4. a) $L_1=\dfrac{1}{2}\ln 2=\ln\sqrt{2}$	1p
Se arată că $\dfrac{x^2}{1+x^4}\le\dfrac{x}{1+x^2},\forall x\in[0,1]$ şi se integrează pe $[0,1]$	1p
b) se consideră funcţia $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\operatorname{arctg}x-x$; cum $f^/(x)=...\le 0,\forall x\in[0,1]$ avem că funcţia f este descrescătoare, deci $f(x)\le f(0)=0,\forall x\in[0,1]$	2p
c) integrând prin părţi avem $nL_n=\int_0^1 x\cdot(\operatorname{arctg}(x^n))^/dx=x\cdot\operatorname{arctg}(x^n)\Big/_0^1-\underbrace{\int_0^1\operatorname{arctg}(x^n)dx}_{not.J_n}$	2p
Integrând pe $[0,1]$ inegalitatea (se foloseşte b)) $0\le\operatorname{arctg}(x^n)\le x^n$ se ajunge, cu teorema cleştelui, la $\lim_{n\to\infty}J_n=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}nL_n=\dfrac{\pi}{4}$	1p