

## CAPITOLUL 5

### INTEGRALE MULTIPLE

#### 5.1. ARIA UNEI MULȚIMI PLANE

În cele ce urmează, prin mulțime plană poligonală, vom înțelege orice mulțime din plan mărginită de un poligon. În particular, prin mulțime plană dreptunghiulară (triunghiulară) înțelegem o mulțime plană a cărei frontieră este un dreptunghi (triunghi). Cititorul este familiarizat cu noțiunea de arie a unei mulțimi plane poligonale de la cursul de geometrie elementară. În acest paragraf vom da un sens noțiunii de mulțime care are arie, pentru o clasă de mulțimi mai generală decât clasa mulțimilor poligonale.

**Definiția 5.1.1** Prin mulțime elementară (în plan) înțelegem orice reuniune finită de mulțimi plane dreptunghiulare cu laturile paralele cu axele de coordonate, fără puncte interioare comune.

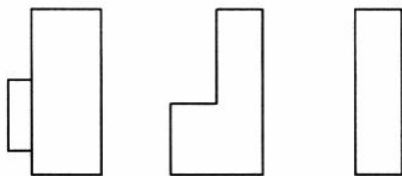


Fig. 1

Facem precizarea că orice reuniune finită de mulțimi dreptunghiulare cu laturile paralele cu axele de coordonate se poate reprezenta ca o mulțime elementară.

Așadar, o mulțime  $E \subset \mathbb{R}^2$  este elementară, dacă există un număr finit de dreptunghiuri (pline)  $D_i = [a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$ ,

$$i = \overline{1, p} \text{ astfel încât } E = \bigcup_{i=1}^p D_i \text{ și}$$

$\overset{\circ}{D}_i \cap \overset{\circ}{D}_j = \emptyset$  pentru  $i \neq j$ . Se știe că aria unui dreptunghi este egală cu produsul lungimilor laturilor, deci aria  $D_i = (b_i - a_i)(d_i - c_i)$ . Prin definiție, aria mulțimii elementare  $E$  este

$$\text{aria } E = \sum_{i=1}^p \text{aria } D_i. \tag{1}$$

În continuare, vom nota cu  $\mathbf{E}$  familia mulțimilor elementare din plan. Dacă  $A \subset \mathbb{R}^2$  este o mulțime mărginită, atunci vom nota cu:

$$S_*(A) = \sup \{ \text{aria } E; E \subset A, E \in \mathbf{E} \} \text{ și}$$

$$S^*(A) = \inf \{ \text{aria } F; F \supset A, F \in \mathbf{E} \}.$$

În cazul când mulțimea  $A$  nu conține nici o mulțime elementară, vom defini  $S_*(A) = 0$ . Cu această precizare, este evident că cele două margini există și că  $S_*(A) \leq S^*(A)$ .

**Definiția 5.1.2** Spunem că o mulțime mărginită  $A \subset \square^2$  este măsurabilă (are arie) în sensul lui Jordan, dacă  $S_*(A) = S^*(A) = S(A)$ . Valoarea comună  $S(A)$  se numește aria mulțimii  $A$ .

**Observația 5.1.1** Orice mulțime elementară are arie în sensul Definiției 5.1.2 și aceasta coincide cu aria definită în (1), adică cu suma ariilor dreptunghiulare care o compun.

**Observația 5.1.2** Orice mulțime poligonală are arie în sensul Definiției 5.1.2 și aceasta coincide cu aria cunoscută din geometria elementară. Într-adevăr, deoarece orice mulțime poligonală este o reuniune finită de mulțimi triunghiulare și orice triunghi este reuniunea sau diferența a două triunghiuri dreptunghice, este suficient să arătăm că orice mulțime plană a cărei frontieră este un triunghi

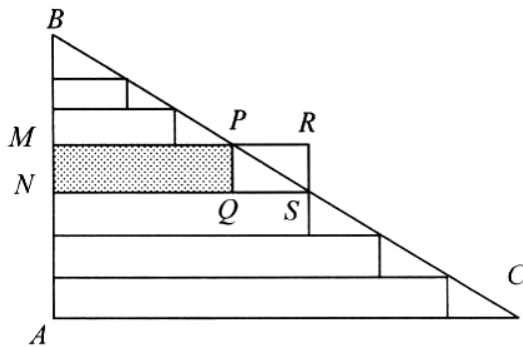


Fig. 2

dreptunghic are arie. Fie un triunghi dreptunghic  $ABC$ ,  $\hat{A} = 90^\circ$ ,  $\overline{AB} = a$ ,  $\overline{AC} = b$ . Împărțim cateta  $AB$  în  $n$  părți egale și considerăm dreptunghiuri de tipul  $MNPQ$  unde  $\overline{MN} = \frac{a}{n}$  și  $MP$  este paralelă cu

$AB$ . Să presupunem că  $\overline{BM} = i \cdot \frac{a}{n}$ .

Din asemănarea triunghiurilor  $BMP$  și  $BAC$  rezultă  $\frac{\overline{BM}}{a} = \frac{\overline{MP}}{b}$ ,

deci  $\overline{MP} = i \cdot \frac{b}{n}$ . Așadar, aria dreptunghiului  $MPQM$  este  $i \cdot \frac{ab}{n^2}$ . Dacă notăm cu  $E$

reuniunea acestor dreptunghiuri, atunci  $E \in \mathbb{E}$ ,  $E$  este inclusă în mulțimea triunghiului  $ABC$  și aria  $E = \frac{ab}{n^2}(1+2+\dots+(n-1)) = \frac{ab(n-1)}{2n}$ . În mod analog, dacă

notăm cu  $F$  reuniunea dreptunghiurilor de tipul  $MRSN$ , atunci  $F$  este o mulțime elementară care include triunghiul  $ABC$  și aria  $F = \frac{ab}{n^2}(1+2+\dots+n) = \frac{ab(n+1)}{2n}$ . În

continuare avem

$$\frac{ab}{2} = \sup_n \frac{ab(n-1)}{2n} \leq S_*(\Delta ABC) \leq S^*(\Delta ABC) \leq \inf_n \frac{ab(n+1)}{2n} = \frac{ab}{2},$$

deci  $S_*(\Delta ABC) = S^*(\Delta ABC) = \frac{ab}{2}$ . Așadar, mulțimea triunghiulară  $ABC$  are arie în sensul Definiției 5.1.2 și aceasta coincide cu aria triunghiului dreptunghic cunoscută din geometria elementară.

**Definiția 5.1.3.** Prin mulțimea elementară poligonală înțelegem orice reuniune finită de mulțimi poligonale care nu au puncte interioare comune.

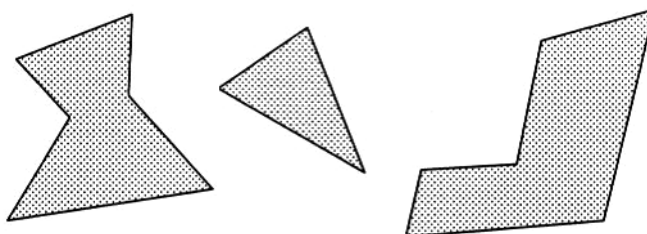


Fig. 3

**Propoziția 5.1.1.** Orice mulțime elementară poligonală este inclusă într-o mulțime elementară de arie cel mult de 8 ori aria mulțimii elementare poligonale inițială.

*Demonstrație*

Demonstrația se bazează pe următoarele observații:

- 1) Orice mulțime poligonală este o reuniune finită de mulțimi triunghiulare;
- 2) Orice triunghi (plin) este reuniunea sau diferența a două triunghiuri (pline) dreptunghice;
- 3) Orice triunghi dreptunghic este inclus într-un dreptunghi de arie de două ori mai mare ca aria sa;
- 4) Orice dreptunghi este o reuniune finită de pătrate și un dreptunghi cu raportul laturilor cuprins între 1 și 2.

Într-adevăr, fie  $D$  un dreptunghi de laturi  $a$  și  $b$  cu  $\frac{a}{b} > 2$ .

Fie  $r = \frac{m}{n}$  un număr rațional cu proprietatea

$$\frac{a}{b} - 2 < \frac{m}{n} < \frac{a}{b} - 1 \tag{2}$$

și fie  $D_1$  dreptunghiul de laturi  $b$  și  $\frac{m}{n}b$ , iar  $D_2$  dreptunghiul de laturi  $b$  și  $a - \frac{m}{n}b$ .

Evident  $D = D_1 \cup D_2$ . Observăm că dreptunghiul  $D_1$  este reuniunea a  $n \times m$  pătrate de latură  $\frac{b}{n}$ . Pe de altă parte, din (2) rezultă  $a - 2b < \frac{m}{n}b < a - b$  și mai

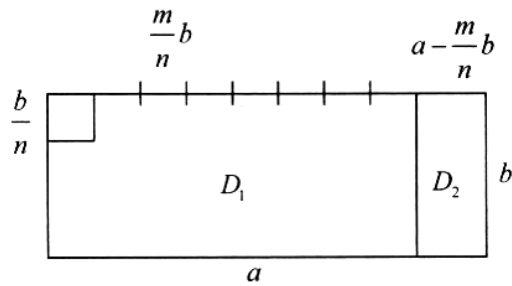


Fig. 4

departe  $b < a - \frac{m}{n}b < 2b$ . Așadar,

avem  $1 < \frac{a - \frac{m}{n}b}{b} < 2$ , deci raportul laturilor dreptunghiului  $D_2$  este cuprins între 1 și 2.

5) Orice dreptunghi cu raportul laturilor cuprins între 1 și 2 este inclus într-un pătrat de arie cel mult dublul ariei dreptunghiului inițial.

6) Orice pătrat este inclus într-un pătrat cu laturile paralele cu axele de coordonate și de arie dublă. Ținând seama și de 5) rezultă că orice dreptunghi cu raportul laturilor cuprins între 1 și 2 este inclus într-un pătrat cu laturile paralele cu axele de coordonate și de arie cel mult de 4 ori aria dreptunghiului inițial.

Din cele de mai sus rezultă că orice mulțime poligonală poate fi inclusă într-o reuniune finită de mulțimi dreptunghiulare cu laturile paralele cu axele de coordonate de arie cel mult de 8 ori aria mulțimii poligonale inițiale.

În sfârșit, să observăm că orice reuniune finită de mulțimi dreptunghiulare cu laturile paralele cu axele de coordonate se poate reprezenta ca o mulțime elementară având aceeași arie.

**Observație 5.1.3.** Există mulțimi plane care nu au arie.

Într-adevăr, fie funcția lui Dirichlet  $D(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{dacă } x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$  și fie

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq D(x)\}.$$

Se observă imediat, în acest caz, că  $S_*(A) = 0$  și  $S^*(A) = 1$ , deci mulțimea  $A$  nu este măsurabilă (nu are arie).

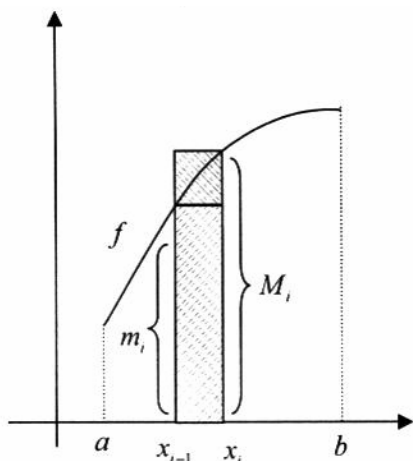
Următoarea propoziție ne furnizează exemple de mulțimi care au arie. Fie  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{Q}_+$  și fie  $\Gamma_f$  subgraficul său, adică mulțimea

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

**Propoziția 5.1.2** Dacă  $f$  este integrabilă pe  $[a, b]$ , atunci subgraficul său  $\Gamma_f$  are arie și  $\text{aria}(\Gamma_f) = \int_a^b f(x) dx$ .

*Demonstrație.*

Fie  $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$  o diviziune oarecare a intervalului  $[a, b]$  și fie  $m_i$  (respectiv  $M_i$ ) marginea inferioară (superioară) a funcției  $f$  pe intervalul  $[x_{i-1}, x_i]$ . Dacă notăm cu



**Fig. 5**

$E_\Delta = \bigcup_{i=1}^n [x_{i-1}, x_i] \times [0, m_i]$ , atunci  $E_\Delta \in \mathbf{E}$ ,  
 $E_\Delta \subset \Gamma_f$  și  
 $\text{aria}(E_\Delta) = \sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1}) = s_\Delta$  unde cu

$s_\Delta$  am notat suma Darboux inferioară. Rezultă că  $s_\Delta \leq S_*(\Gamma_f)$ .

În mod analog, dacă notăm cu

$F_\Delta = \bigcup_{i=1}^n [x_{i-1}, x_i] \times [0, M_i]$ , atunci  $F_\Delta \in \mathbf{E}$ ,

$F_\Delta \supset \Gamma_f$  și  $\text{aria}(F_\Delta) = S_\Delta \geq S^*(\Gamma_f)$ .

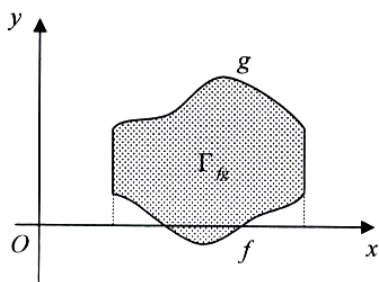
Așadar avem:

$$(3)$$

$$s_\Delta \leq S_*(\Gamma_f) \leq S^*(\Gamma_f) \leq S_\Delta$$

Faptul că  $f$  este integrabilă pe  $[a, b]$  implică:  $I_* = \sup_{\Delta} s_\Delta = \inf_{\Delta} S_\Delta = I^* = \int_a^b f(x) dx$ .

În sfârșit, din (3) rezultă  $S_*(\Gamma_f) = S^*(\Gamma_f) = \int_a^b f(x) dx$  și cu aceasta teorema este demonstrată.



**Fig. 6**

Fie  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbf{P}$  două funcții cu proprietatea  $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$  și fie  $\Gamma_{fg} = \{(x, y) \in \square^2 \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$ .

**Corolarul 5.1.1.** Dacă  $f$  și  $g$  sunt integrabile pe  $[a, b]$ , atunci mulțimea  $\Gamma_{fg}$  are arie

$$\text{și } \text{aria}(\Gamma_{fg}) = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx.$$

**Exemplul 5.1.1.** Să se calculeze aria elipsei.

Ecuția elipsei este  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ . Din motive de simetrie este suficient să calculăm un sfert din aria elipsei, de exemplu aria mulțimii hașurată în figura 6.

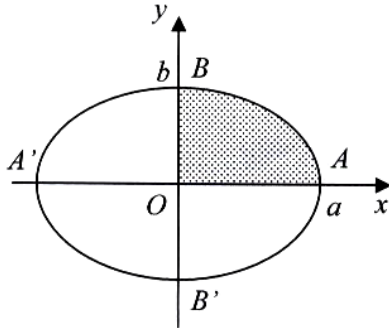


Fig. 7

Arcul  $\overline{BA}$  este graficul funcției  
 $f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ ,  $x \in [0, a]$ .

Conform Propoziției 5.1.1 avem:

$$\frac{1}{4} \text{aria (elipsei)} = \int_0^a f(x) dx = \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx =$$

$$= \frac{b}{a} \left( \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} \right) \Big|_0^a =$$

$$= \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi ab}{4}. \text{ Așadar aria elipsei de}$$

semiaxe  $a$  și  $b$  este egală cu  $\pi ab$ .

**Teorema 5.1.1.** Fie  $A \subset \mathbb{R}^2$  o mulțime mărginită. Condiția necesară și suficientă ca mulțimea  $A$  să aibă arie este ca pentru orice  $\varepsilon > 0$  să existe două mulțimi elementare  $E_\varepsilon$  și  $F_\varepsilon$  cu proprietățile:  $E_\varepsilon \subset A \subset F_\varepsilon$  și  $\text{aria}(F_\varepsilon) - \text{aria}(E_\varepsilon) < \varepsilon$ .

*Demonstrație*

**Necesitatea:** Dacă  $S_*(A) = S^*(A) = S(A)$ , atunci din definiția marginii superioare (inferioare) rezultă că există  $E_\varepsilon \in \mathbf{E}$ ,  $E_\varepsilon \subset A$  astfel încât  $S(A) - \frac{\varepsilon}{2} < \text{aria}(E_\varepsilon)$  și există  $F_\varepsilon \in \mathbf{E}$ ,  $F_\varepsilon \supset A$  astfel încât  $\text{aria}(F_\varepsilon) < S(A) + \frac{\varepsilon}{2}$ . Așadar, avem  $\text{aria}(F_\varepsilon) - \text{aria}(E_\varepsilon) < \varepsilon$ .

**Suficiența.** Dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$ , există  $E_\varepsilon, F_\varepsilon \in \mathbf{E}$  cu proprietățile:  $E_\varepsilon \subset A \subset F_\varepsilon$  și  $\text{aria}(F_\varepsilon) - \text{aria}(E_\varepsilon) < \varepsilon$ , atunci avem:  $0 \leq S^*(A) - S_*(A) < \varepsilon$ . Cum  $\varepsilon > 0$  a fost arbitrar, rezultă că  $S^*(A) = S_*(A)$ , deci  $A$  are arie.

**Definiția 5.1.4.** Spunem că mulțimea  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  este de arie zero dacă poate fi inclusă într-o mulțime elementară de arie oricât de mică. Cu alte cuvinte, dacă  $\forall \varepsilon > 0$  există o mulțime elementară  $F \supset \Gamma$  cu  $\text{aria}(F) < \varepsilon$ . În particular avem  $S^*(\Gamma) = 0$  și cum  $0 \leq S_*(\Gamma) \leq S^*(\Gamma)$  rezultă că  $\Gamma$  are arie și că  $\text{aria}(\Gamma) = 0$ . Cu această definiție Teorema 5.1.1. se poate reformula astfel:

**Teorema 5'.1.1.** Fie  $A \subset \mathbb{R}^2$  o mulțime mărginită. Condiția necesară și suficientă ca mulțimea  $A$  să aibă arie este ca frontiera sa  $\Gamma$  să fie de arie zero.

*Demonstrație.*

Dacă  $A$  are arie, atunci  $\forall \varepsilon > 0, \exists E_\varepsilon, F_\varepsilon \in \mathbf{E}$  cu proprietățile  $E_\varepsilon \subset A \subset F_\varepsilon$  și  $\text{aria}(F_\varepsilon \setminus E_\varepsilon) = \text{aria}(F_\varepsilon) - \text{aria}(E_\varepsilon) < \varepsilon$ . Cum  $\Gamma = \text{fr.} A \subset F_\varepsilon \setminus \overset{\circ}{E}_\varepsilon$  și  $F_\varepsilon \setminus \overset{\circ}{E}_\varepsilon$  este de asemenea o mulțime elementară, rezultă că  $\Gamma$  este de arie zero.

Afirmația reciprocă rezultă din Observația că orice mulțime elementară care conține frontiera  $\Gamma$  a mulțimii  $A$  se poate scrie ca diferența a două mulțimi elementare  $F \setminus E$  cu  $E \subset A \subset F$ .

**Corolarul 5.1.2.** *Graficul oricărei funcții continue  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{P}$  este o mulțime de arie zero.*

Într-adevăr, funcția  $f$  fiind continuă, este integrabilă și conform Propoziției 5.1.1 subgraficul său are arie. Afirmația rezultă acum din Teorema 5'.1.1.

**Corolarul 5.1.3.** *Orice mulțime plană a cărei frontieră este o reuniune finită de grafice de funcții continue, are arie. (Afirmația rezultă din Corolarul 5.1.2, din observația că o reuniune finită de mulțimi de arie zero este de asemenea de arie zero și din Teorema 5'.1.1).*

**Teorema 5"1.1.** *O mulțime mărginită  $A \subset \square^2$  are arie dacă și numai dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există două mulțimi elementare poligonale  $P_\varepsilon$  și  $Q_\varepsilon$  cu proprietățile:  $P_\varepsilon \subset A \subset Q_\varepsilon$  și  $\text{aria} Q_\varepsilon - \text{aria} P_\varepsilon < \varepsilon$ .*

Afirmația rezultă din Propoziția 5.1.1 și din Teorema 5.1.1.

**Observația 5.1.4.** *Orice disc (mulțime plană a cărei frontieră este un cerc) are arie.*

Într-adevăr, dacă notăm cu  $P_n$  (respectiv  $Q_n$ ) mulțimea poligonală a cărei frontieră este poligonul regulat cu  $n$  laturi înscris (respectiv circumscris) în cerc, atunci  $\text{aria} Q_n - \text{aria} P_n$  este oricât de mică pentru  $n$  suficient de mare.

În continuare notăm cu  $(\theta, \rho)$  coordonatele polare în plan.

**Propoziția 5.1.3.** *Fie  $\rho = \rho(\theta)$ ,  $\theta \in [\alpha, \beta]$  o funcție continuă și fie*

$$A = \{(\theta, \rho) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, 0 \leq \rho \leq \rho(\theta)\}. \text{ Atunci } A \text{ are arie și } \text{aria} A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\theta) d\theta.$$

*Demonstrație*

Fie  $\Delta_n : \alpha = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{i-1} < \theta_i < \dots < \theta_n = \beta$  o diviziune echidistantă a intervalului  $[\alpha, \beta]$ .

Fie  $m_i$  (respectiv  $M_i$ ) marginea inferioară (superioară) a funcției  $\rho = \rho(\theta)$ ,  $\theta \in [\theta_{i-1}, \theta_i]$ . Aria sectorului de cerc  $OR_iP_i = \{(\theta, \rho) \mid \theta_{i-1} \leq \theta \leq \theta_i, 0 \leq \rho \leq \rho(\theta)\}$

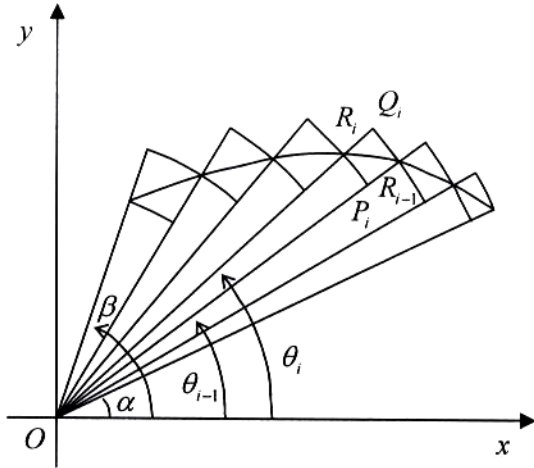


Fig. 8

Observăm că cele două sume sunt sumele Darboux asociate funcției  $\frac{1}{2}\rho^2(\theta)$ ,  $\theta \in [\alpha, \beta]$  și diviziunii  $\Delta_n$ . Ținând seama că  $\|\Delta_n\| = \frac{\beta - \alpha}{n} \rightarrow 0$  și funcția  $\frac{1}{2}\rho^2$  este integrabilă pe  $[\alpha, \beta]$ , rezultă că există

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{aria } P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{aria } Q_n = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\theta) d\theta \quad (4)$$

Pe de altă parte, deoarece  $P_n$  (respectiv  $Q_n$ ) are arie pentru  $\forall \varepsilon > 0$  există o mulțime elementară  $E_n$  (respectiv  $F_n$ ),  $E_n \subset P_n \subset A \subset Q_n \subset F_n$  astfel încât  $\text{aria } P_n - \text{aria } E_n < \frac{\varepsilon}{3}$  și  $\text{aria } F_n - \text{aria } Q_n < \frac{\varepsilon}{3}$ . În plus, ținând seama de (4) putem presupune că  $\text{aria } Q_n - \text{aria } P_n < \frac{\varepsilon}{3}$ . Așadar, avem  $\text{aria } F_n - \text{aria } E_n < \varepsilon$ , deci mulțimea  $A$  are arie și  $\text{aria } A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\theta) d\theta$ .

**Teorema 5.1.2.** *Suportul unei curbe rectificabile este o mulțime de arie zero.*

este egală cu  $\frac{1}{2}m_i^2(\theta_i - \theta_{i-1})$ , iar aria sectorului de cerc  $OQ_iR_{i-1}$  este egală cu  $\frac{1}{2}M_i^2(\theta_i - \theta_{i-1})$ .

Dacă notăm cu  $P_n$  (respectiv  $Q_n$ ) reuniunea celor  $n$  sectoare de cerc  $OR_iP_i$  (respectiv  $OQ_iR_{i-1}$ ) atunci  $P_n \subset A \subset Q_n$  și

$$\text{aria } P_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i^2 (\theta_i - \theta_{i-1}) \text{ iar}$$

$$\text{aria } Q_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} M_i^2 (\theta_i - \theta_{i-1}).$$



*Demonstrație.*

Fie  $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  drumul parametrizat rectificabil care determină curba  $\gamma$ , definit prin  $r(t) = (x(t), y(t))$ . Fie  $L$  lungimea acestui drum și fie  $x = \tilde{x}(s)$ ,  $y = \tilde{y}(s)$ ,  $s \in [0, L]$  reprezentarea sa naturală (Vezi Cap. 4, §4.3).

Fie  $\Delta_n : 0 = s_0 < s_1 < \dots < s_{i-1} < s_i < \dots < s_n = L$  o diviziune echidistantă a intervalului  $[0, L]$  și fie  $M_i$  punctul de coordonate  $(\tilde{x}(s_i), \tilde{y}(s_i))$  de pe suportul curbei  $\gamma$ . Lungimea arcului  $\overline{M_{i-1}M_i}$  este  $\frac{L}{n}$ . Considerăm un pătrat  $D_i$  cu centrul în  $M_i$  și laturile paralele cu axele de coordonate, de latură  $\frac{2L}{n}$ . Este evident că suportul curbei  $\gamma$  (imaginea funcției vectoriale  $r$ ) este inclus în  $\bigcup_{i=0}^n D_i$  și

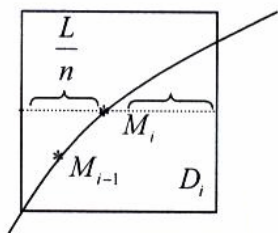


Fig. 9

$$\text{aria} \left( \bigcup_{i=0}^n D_i \right) \leq \sum_{i=0}^n \text{aria}(D_i) = (n+1) \frac{4L^2}{n^2}. \text{ Cum}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \frac{4L^2}{n^2} = 0, \text{ pentru } n \text{ suficient de mare, aria}$$

mulțimii  $\bigcup_{i=0}^n D_i$  este oricât de mică, deci suportul

curbei  $\gamma$  este o mulțime de arie zero.

Din Teoremele 5'.1.1 și 5.1.2 rezultă:

**Corolarul 5.1.4.** *Orice mulțime plană mărginită a cărei frontieră este o reuniune finită de curbe rectificabile are arie.*

**Corolarul 5.1.5.** *Orice mulțime mărginită a cărei frontieră este netedă pe porțiuni are arie.*

Afirmația rezultă din Teorema 4.2.1 și Corolarul 5.1.4.

**Propoziția 5.1.2.** *Dacă  $A_1$  și  $A_2$  sunt două mulțimi care au arie și nu au puncte interioare comune, atunci reuniunea lor  $A = A_1 \cup A_2$  are arie și*  

$$\text{aria}(A) = \text{aria}(A_1) + \text{aria}(A_2).$$

*Demonstrație.* Deoarece frontiera lui  $A$  este inclusă în reuniunea frontierelor lui  $A_1$  și  $A_2$  și acestea sunt de arie zero, rezultă că și  $\text{fr}A$  este de arie zero, deci  $A$  are arie.

Pentru orice  $\varepsilon > 0$  există mulțimile elementare  $E_i, F_i, i = 1, 2$  cu proprietățile:  $E_1 \subset A_1 \subset F_1, E_2 \subset A_2 \subset F_2, \text{aria}(F_1) - \text{aria}(E_1) < \varepsilon, \text{aria}(F_2) - \text{aria}(E_2) < \varepsilon$ .

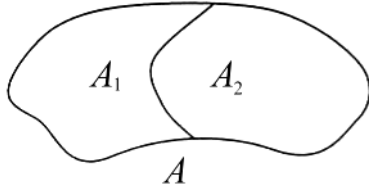


Fig. 10

Avem  
 $\text{aria } E_1 + \text{aria } E_2 \leq \text{aria } A \leq \text{aria}(F_1 \cup F_2) \leq$   
 $\leq \text{aria } F_1 + \text{aria } F_2$   
 și  
 $\text{aria } E_1 + \text{aria } E_2 \leq \text{aria } A_1 + \text{aria } A_2 \leq$   
 $\leq \text{aria } F_1 + \text{aria } F_2$

Aceste inegalități implică

$$|\text{aria } A - (\text{aria } A_1 + \text{aria } A_2)| \leq \text{aria } F_1 - \text{aria } E_1 + \text{aria } F_2 - \text{aria } E_2 < 2\varepsilon.$$

Cum  $\varepsilon > 0$  a fost arbitrar, rezultă că  $\text{aria } A = \text{aria } A_1 + \text{aria } A_2$ .

## 5.2. INTEGRALA DUBLĂ. DEFINIȚIE. PROPRIETĂȚI

Fie  $A \subset \square^2$  o mulțime mărginită. Atunci există un cerc care conține mulțimea  $A$ . Rezultă că distanța dintre orice două puncte ale mulțimii  $A$  este mai mică decât diametrul acestui cerc. Așadar, mulțimea  $\{\text{dist}(M, N), M \in A, N \in A\}$  este o mulțime de numere reale pozitive majorată, deci are margine superioară.

**Definiția 5.2.1.** Fie  $A \subset \square^2$  o mulțime mărginită. Se numește diametrul mulțimii  $A$  următorul număr:

$$d(A) = \text{diam}(A) = \sup \{ \text{dist}(M, N); M \in A, N \in A \}$$



Fig. 1

**Definiția 5.2.2.** Fie  $A$  și  $B$  două mulțimi din plan. Se numește distanța dintre aceste mulțimi următorul număr

$$d(A, B) = \inf \{ \text{dist}(M, N); M \in A, N \in B \}.$$

Este clar că dacă  $A \cap B \neq \emptyset$  atunci  $d(A, B) = 0$ . Afirmarea reciprocă nu este în general adevărată. Într-adevăr, distanța dintre graficul funcției  $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$  și axa  $Ox$  este zero, deși cele două mulțimi sunt disjuncte.

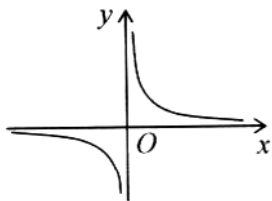


Fig. 2

**Teorema 5.2.1.** Fie  $A$  și  $B$  două mulțimi plane închise, mărginite și disjuncte. Atunci  $d(A, B) > 0$ .

*Demonstrație.* Presupunem prin absurd că  $d(A, B) = 0$ . Atunci, pentru  $\varepsilon = \frac{1}{n}$ , există  $P_n \in A$  și  $Q_n \in B$  astfel încât

$$\text{dist}(P_n, Q_n) < \frac{1}{n} \tag{1}$$

Deoarece mulțimea  $A$  este mărginită, rezultă că și șirul  $\{P_n\}$  este mărginit. Din Lema Cesàro deducem că există un subșir  $\{P_{n_k}\}$  convergent. Fie  $P = \lim_{k \rightarrow \infty} P_{n_k}$ . Cum  $A$  este închisă rezultă că  $P \in A$ . Pe de altă parte, din (1) rezultă că subșirul  $\{Q_{n_k}\}$  este de asemenea convergent și limita sa este tot  $P$ . Evident,  $P \in B$ , pentru că  $B$  este închisă. Am ajuns astfel la o contradicție și anume  $P \in A \cap B$ , adică  $A$  și  $B$  nu sunt disjuncte.

În cele ce urmează vom nota cu  $D$  un domeniu compact din  $\mathbb{R}^2$ , adică o mulțime conexă, închisă și mărginită. Presupunem în plus că  $D$  are arie. Aceasta se întâmplă, de exemplu, dacă frontiera lui  $D$  este o reuniune finită de curbe rectificabile. În particular dacă este netedă pe porțiuni.

**Definiția 5.2.3.** Se numește partiție a lui  $D$  orice familie finită de subdomenii  $D_i \subset D$ ,  $i = \overline{1, p}$ , care au arie, nu au puncte interioare comune și  $D = \bigcup_{i=1}^p D_i$ .

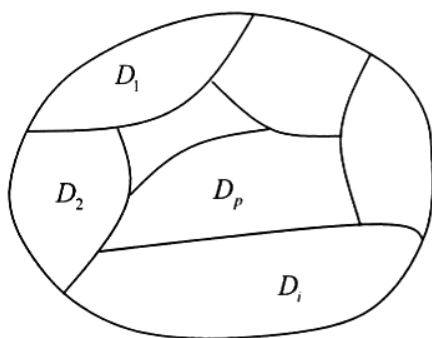


Fig. 3

Dacă notăm cu  $\rho$  partiția  $D_1, D_2, \dots, D_p$  a lui  $D$  atunci norma acestei partiții se definește astfel:  $\|\rho\| = \max \{ \text{diam}(D_i); 1 \leq i \leq p \}$ .

Din Propoziția 5.1.2 rezultă că aria  $D = \sum_{i=1}^p \text{aria } D_i$ .

**Definiția 5.2.4.** Spunem că partiția  $\rho'$  a domeniului  $D$  este mai fină ca partiția  $\rho$  a acestui domeniu și notăm aceasta cu  $\rho' \succ \rho$ , dacă fiecare subdomeniu al partiției  $\rho$  este o reuniune finită de subdomenii ale partiției  $\rho'$ . Așadar, dacă  $\rho$  este partiția  $(D_i)_{1 \leq i \leq p}$ , atunci

$\rho'$  este de forma  $\{D'_{ij}\}_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n_i}}$  și  $D_i = \bigcup_{j=1}^{n_i} D'_{ij}$ ,  $\forall i = \overline{1, p}$ .

Este evident că dacă  $\rho < \rho'$  atunci  $\|\rho\| \geq \|\rho'\|$ . Fie  $\rho: D_1, D_2, \dots, D_p$  o partiție a domeniului  $D$  și fie  $f: D \rightarrow \mathbb{P}$  o funcție mărginită. Notăm cu:

$$m = \inf \{ f(x, y) \mid (x, y) \in D \}, \quad M = \sup \{ f(x, y) \mid (x, y) \in D \}$$

$$m_i = \inf \{ f(x, y) \mid (x, y) \in D_i \},$$

$$M_i = \sup \{ f(x, y) \mid (x, y) \in D_i \}.$$

Sumele Darboux corespunzătoare funcției  $f$  și partiției  $\rho$  se definesc astfel:

$$s_\rho = \sum_{i=1}^p m_i \text{ aria } D_i \quad \text{și} \quad S_\rho = \sum_{i=1}^p M_i \text{ aria } D_i.$$

Deoarece  $m \leq m_i \leq M_i \leq M$ ,  $\forall i$  și,

$$\text{aria } D = \sum_{i=1}^p \text{aria } D_i, \text{ rezultă:}$$

$$m(\text{aria } D) \leq s_\rho \leq S_\rho \leq M(\text{aria } D) \quad (2)$$

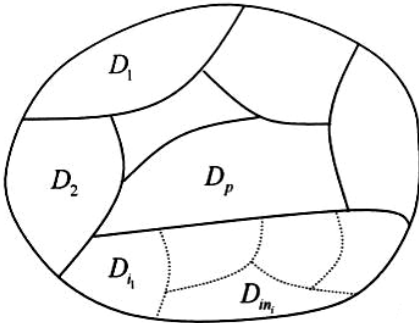


Fig. 4

**Lema 5.2.1.** Dacă  $\rho < \rho'$  atunci  $s_\rho \leq s_{\rho'} \leq S_{\rho'} \leq S_\rho$ .

*Demonstrație*

Presupunem că partiția  $\rho$  se compune din domeniile  $(D_i)_{1 \leq i \leq p}$  și partiția  $\rho'$  din domeniile  $\{D'_{ij}\}_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n_i}}$ . Cum  $\rho < \rho'$  rezultă că pentru orice  $i = \overline{1, p}$  avem

$$D_i = \bigcup_{j=1}^{n_i} D'_{ij}. \text{ Dacă notăm cu } m'_{ij} = \inf \{ f(x, y) \mid (x, y) \in D'_{ij} \}, \text{ atunci } m'_{ij} \geq m_i,$$

$\forall i = \overline{1, p}, \forall j = \overline{1, n_i}$ . În continuare avem

$$s_\rho = \sum_{i=1}^p m_i \text{ aria } D_i = \sum_{i=1}^p m_i \left( \sum_{j=1}^{n_i} \text{aria } D'_{ij} \right) \leq \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{n_i} m'_{ij} \text{ aria } D'_{ij} = s_{\rho'}.$$

Așadar, am arătat că  $s_\rho \leq s_{\rho'}$ . În mod asemănător se arată că  $S_{\rho'} \leq S_\rho$ .

**Lema 5.2.2.** Pentru orice două partiții  $\rho'$  și  $\rho''$  ale domeniului  $D$  avem:

$$s_{\rho'} \leq S_{\rho''}.$$

*Demonstrație*

Să presupunem că partiția  $\rho'$  se compune din subdomeniile  $(D'_i)_{1 \leq i \leq p}$  iar partiția  $\rho''$  din subdomeniile  $(D''_j)_{1 \leq j \leq q}$ . Dacă notăm cu  $\rho$  partiția formată din domeniile  $(D'_i \cap D''_j)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$ , atunci  $\rho$  este mai fină și ca  $\rho'$  și ca  $\rho''$ . Din Lema 5.1.2 rezultă:  $s_{\rho'} \leq s_{\rho} \leq S_{\rho} \leq S_{\rho''}$ .

În continuare vom nota cu

$$I_* = \sup \{s_{\rho} \mid \rho \text{-partiție a lui } D\} \text{ și } I^* = \inf \{S_{\rho} \mid \rho \text{-partiție a lui } D\}.$$

Existența acestor margini rezultă din inegalitățile (2). Din Lema 5.2.2 rezultă că  $I_* \leq I^*$ .

**Definiția 5.2.5.** Spunem că funcția  $f$  este integrabilă pe domeniul  $D$  dacă  $I_* = I^* = I$ . Valoarea comună  $I$  se notează cu  $I = \iint_D f(x, y) dx dy$  și se numește integrala dublă a funcției  $f$  pe domeniul  $D$ .

**Lema 5.2.3.** Pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta_{\varepsilon} > 0$  astfel încât pentru orice partiție  $\rho$  a domeniului  $D$  cu  $\|\rho\| < \delta_{\varepsilon}$  avem:  $I_* - \varepsilon < s_{\rho} \leq S_{\rho} < I^* + \varepsilon$ .

*Demonstrație.* Din definiția marginii superioare rezultă că  $\forall \varepsilon > 0$  există o partiție  $\rho_0$  a domeniului  $D$  astfel încât

$$I_* - \frac{\varepsilon}{2} < s_{\rho_0} \tag{3}$$

Vom nota cu  $(G_{\kappa})_{1 \leq \kappa \leq r}$  elementele partiției  $\rho_0$ , cu  $\Gamma_{\kappa}$  frontiera mulțimii  $G_{\kappa}$  și cu  $\Gamma = \bigcup_{\kappa=1}^r \Gamma_{\kappa}$ . Deoarece  $G_{\kappa}$  are arie, rezultă că  $\Gamma_{\kappa}$  este de arie zero. Cum  $\Gamma$  este o reuniune finită de mulțimi mărginite închise, de arie zero, rezultă că  $\Gamma$  este o mulțime închisă, mărginită de arie zero.

Pentru orice  $\varepsilon > 0$  există o mulțime elementară  $E$  cu proprietățile  $\Gamma \subset E$  și aria  $E < \frac{\varepsilon}{2(M-m)}$ , unde  $M$  și  $m$  sunt marginile funcției  $f$  pe  $D$ . Dacă notăm cu  $C$  frontiera mulțimii elementare  $E$ , atunci  $C$  este o mulțime închisă mărginită și putem presupune că  $\Gamma \cap C = \emptyset$ . Din Teorema 5.2.1 rezultă că  $\text{dist}(C, \Gamma) = \delta_{\varepsilon} > 0$ . Fie  $\rho: (D_i)_{1 \leq i \leq p}$  o partiție a domeniului  $D$  cu  $\|\rho\| < \delta_{\varepsilon}$ . Să observăm că elementele partiției  $\rho$  sunt de două feluri și anume: Dacă  $D_i \cap \Gamma \neq \emptyset$  atunci  $D_i \subset E$ ; dacă  $D_i \cap \Gamma = \emptyset$  atunci există o singură mulțime  $G_{\kappa}$  astfel încât  $D_i \subset G_{\kappa}$ . Dacă

$I = \{1, 2, \dots, p\}$ , atunci notăm cu  $I_1 = \{i \in I \mid D_i \cap \Gamma \neq \emptyset\}$  și cu  $I_2 = I \setminus I_1$ . Așadar, dacă  $i \in I_1$  avem  $D_i \subset E$  și dacă  $i \in I_2$  există un  $\kappa$  (unic) astfel încât  $D_i \subset G_\kappa$ . Fie  $\tilde{\rho}$  partiția formată din mulțimile  $(D_i \cap G_\kappa)_{i, \kappa}$ .

Din cele de mai sus rezultă că elementele lui  $\tilde{\rho}$  sunt de forma  $(D_i \cap G_\kappa)_{\substack{i \in I_1 \\ \kappa=1, r}}$  și  $\{D_j\}_{j \in I_2}$ .

$$\begin{aligned} \text{În continuare avem } s_{\tilde{\rho}} - s_\rho &= \sum_{i \in I_1} \sum_{\kappa=1}^r \tilde{m}_{i\kappa} \text{aria}(D_i \cap G_\kappa) - \sum_{i \in I_1} m_i \text{aria}(D_i) \leq \\ &\leq \sum_{i \in I_1} M \text{aria } D_i - \sum_{i \in I_1} m \text{aria } D_i \leq (M - m) \text{aria } E < (M - m) \frac{\varepsilon}{2(M - m)} = \frac{\varepsilon}{2}. \text{ Așadar} \\ s_{\tilde{\rho}} &< s_\rho + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \quad (4)$$

Pe de altă parte, din Lema 5.2.1 rezultă că  $s_{\rho_0} \leq s_{\tilde{\rho}}$ , deoarece  $\rho_0 \prec \tilde{\rho}$ . Ținând seama acum de (3) și (4) obținem:

$$I_* - \frac{\varepsilon}{2} < s_{\rho_0} \leq s_{\tilde{\rho}} < s_\rho + \frac{\varepsilon}{2}, \text{ deci } I_* - \varepsilon < s_\rho.$$

Cealaltă inegalitate din enunț se demonstrează asemănător.

**Teorema 5.2.2** (Darboux) *Fie  $D$  un domeniu compact care are arie și  $f: D \rightarrow \mathbb{P}$  o funcție mărginită. Condiția necesară și suficientă ca  $f$  să fie integrabilă pe  $D$  este ca pentru orice  $\varepsilon > 0$  să existe  $\delta_\varepsilon > 0$  cu proprietatea că pentru orice partiție  $\rho$  a lui  $D$  cu  $\|\rho\| < \delta_\varepsilon$  să avem  $S_\rho - s_\rho < \varepsilon$ .*

*Demonstrație.*

**Necesitate.** Prin ipoteză  $I_* = I^* = I$ . Din Lema 5.2.3 rezultă că  $\forall \varepsilon > 0$ , există  $\delta_\varepsilon > 0$  astfel încât  $\forall \rho$  partiție a lui  $D$  cu  $\|\rho\| < \delta_\varepsilon$  avem

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < s_\rho \leq S_\rho < I + \frac{\varepsilon}{2}, \text{ deci } S_\rho - s_\rho < \varepsilon.$$

**Suficiență.** Prin ipoteză  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0$  astfel încât  $S_\rho - s_\rho < \varepsilon$  pentru orice partiție  $\rho$  cu  $\|\rho\| < \delta_\varepsilon$ . Din inegalitățile  $s_\rho \leq I_* \leq I^* \leq S_\rho$  deducem  $0 \leq I^* - I_* < \varepsilon$ . Cum  $\varepsilon > 0$  este arbitrar rezultă  $I^* - I_* = 0$ , deci  $f$  este integrabilă pe  $D$ .

**Teorema 5.2.3.** *Orice funcție continuă pe  $D$  este integrabilă pe  $D$ .*

*Demonstrație.* Fie  $f : D \rightarrow \mathbb{P}$  continuă și fie  $\rho : D_1, \dots, D_p$  o partiție oarecare a lui  $D$ . Atunci avem:

$$S_\rho - s_\rho = \sum_{i=1}^p (M_i - m_i) \text{aria } D_i.$$

Din continuitatea lui  $f$  rezultă pe de o parte că  $f$  este mărginită și își atinge marginile pe fiecare domeniu compact  $D_i$ , iar pe de altă parte că  $f$  este uniform continuă pe  $D$ . Fie  $(\xi'_i, \eta'_i) \in D_i$  astfel încât  $m_i = f(\xi'_i, \eta'_i)$  și fie  $(\xi''_i, \eta''_i) \in D_i$  astfel încât  $M_i = f(\xi''_i, \eta''_i)$ .

Din continuitatea uniformă rezultă că  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$  astfel încât  $\forall (x', y') \in D, (x'', y'') \in D$  cu  $|x' - x''| < \delta_\varepsilon, |y' - y''| < \delta_\varepsilon$  avem

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| < \frac{\varepsilon}{\text{aria } D}.$$

Dacă presupunem acum că  $\|\rho\| < \delta_\varepsilon$  va rezulta

$$S_\rho - s_\rho = \sum_{i=1}^p (f(\xi''_i, \eta''_i) - f(\xi'_i, \eta'_i)) \text{aria } D_i < \frac{\varepsilon}{\text{aria } D} \sum_{i=1}^p \text{aria } (D_i) = \varepsilon.$$

Din Teorema 5.2.2 rezultă că  $f$  este integrabilă pe  $D$ .

**Teorema 5.2.4.** *Dacă  $f$  este mărginită pe  $D$  și continuă pe  $D$  cu excepția eventual a unei mulțimi de arie zero, atunci  $f$  este integrabilă pe  $D$ .*

*Demonstrație.*

Fie  $M > 0$  astfel încât  $|f(x, y)| < M, \forall (x, y) \in D$  și fie  $\varepsilon > 0$  oarecare.

Prin ipoteză există o mulțime elementară  $E$  care conține în interiorul său punctele de discontinuitate ale lui  $f$  și  $\text{aria } E < \frac{\varepsilon}{4M}$ .

Dacă notăm cu  $\tilde{D} = D \setminus \overset{\circ}{E}$ , atunci  $\tilde{D}$  este o mulțime închisă și evident mărginită. Cum  $f$  este continuă pe  $\tilde{D}$  rezultă că  $f$  este uniform continuă pe  $\tilde{D}$ , deci  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$  astfel încât oricare ar fi  $(x', y') \in \tilde{D}, (x'', y'') \in \tilde{D}$  cu  $|x' - x''| < \delta_\varepsilon, |y' - y''| < \delta_\varepsilon$  avem  $|f(x', y') - f(x'', y'')| < \frac{\varepsilon}{2 \text{aria } (D)}$ . Fie acum  $\rho$  o partiție a lui  $D$  al cărui prim element este  $D_1 = E \cap D$  iar celelalte elemente  $D_2, \dots, D_j$  au diame- trele mai mici ca  $\delta_\varepsilon$ . Dacă calculăm diferența  $S_\rho - s_\rho$  obținem:

$$S_\rho - s_\rho \leq (M_1 - m_1) \text{aria } E + \sum_{i=2}^n (M_i - m_i) \text{aria } D_i <$$

$$< 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2 \text{aria } D} \cdot \sum_{i=2}^n \text{aria } D_i < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Cum  $0 \leq I^* - I_* \leq S_\rho - s_\rho < \varepsilon$  și  $\varepsilon > 0$  este arbitrar rezultă că  $I^* = I_*$ , deci  $f$  este integrabilă pe  $D$ .

În continuare vom introduce noțiunea de sumă Riemann. Fie  $\rho: D_1, \dots, D_p$  o partiție a domeniului  $D$  și fie  $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$  un punct arbitrar,  $\forall i = 1, p$ . Notăm cu  $(\xi, \eta) = (\xi_i, \eta_i)_{1 \leq i \leq p}$ . Suma Riemann atașată funcției  $f$ , diviziunii  $\rho$  și punctelor intermediare  $(\xi_i, \eta_i)$  se definește astfel:  $\sigma_\rho(f, \xi, \eta) = \sum_{i=1}^p f(\xi_i, \eta_i) \text{aria } D_i$ . Cum  $m_i \leq f(\xi_i, \eta_i) \leq M_i, \forall i = 1, p$ , rezultă  $s_\rho \leq \sigma_\rho(f, \xi, \eta) \leq S_\rho, \forall (\xi, \eta)$ .

**Definiția 5.1.6.** Fie  $D$  un domeniu compact și fie  $f: D \rightarrow \mathbb{P}$  o funcție mărginită. Spunem că  $f$  este integrabilă pe  $D$  (în sensul lui Riemann, pe scurt (R)-integrabilă) dacă există un număr finit  $I$  cu proprietatea că  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$  astfel încât oricare ar fi  $\rho$  partiție a lui  $D$  cu  $\|\rho\| < \delta_\varepsilon$  și oricare ar fi alegerea punctelor intermediare  $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$  avem

$$|\sigma_\rho(f, \xi, \eta) - I| < \varepsilon.$$

Numărul  $I$  se numește integrala dublă a funcției  $f$  pe domeniul  $D$  și se folosește notația  $I = \iint_D f(x, y) dx dy$ .

**Observația 5.2.1.** Pentru orice  $\varepsilon > 0$ , există  $(\alpha_i, \beta_i) \in D$  și  $(\gamma_i, \delta_i) \in D$  astfel încât  $S_\rho - \sigma_\rho(f, \alpha, \beta) < \varepsilon$  și  $\sigma_\rho(f, \gamma, \delta) - s_\rho < \varepsilon$ .

Într-adevăr, din definiția marginii superioare rezultă că  $\forall \varepsilon > 0$ , există  $(\alpha_i, \beta_i) \in D_i$  astfel încât  $M_i - f(\alpha_i, \beta_i) < \frac{\varepsilon}{\text{aria } D}$ .

În continuare avem:

$$S_\rho - \sigma_\rho(f, \alpha, \beta) = \sum_{i=1}^p (M_i - f(\alpha_i, \beta_i)) \text{aria } D_i < \frac{\varepsilon}{\text{aria } D} \cdot \text{aria } D = \varepsilon.$$

Cealaltă inegalitate se demonstrează în mod analog.

Folosind această observație și procedând ca în demonstrația Teoremei 2.3.2 se arată că cele două definiții ale integralei duble cu sume Riemann și sume Darboux coincid.

De asemenea, se poate demonstra, ca și în cazul integralei simple, că are loc următorul criteriu de integrabilitate.



**Teorema 5.2.5 (Riemann).** Fie  $f : D \rightarrow \mathbb{P}$  mărginită. Condiția necesară și suficientă ca  $f$  să fie integrabilă pe  $D$ , este să existe un număr real finit  $I$  cu proprietatea că pentru orice șir  $\{\rho_n\}$  de partiție ale lui  $D$ , care satisface condiția

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\rho_n\| = 0 \text{ și orice șir } (\xi^{(n)}, \eta^{(n)}) \text{ de puncte intermediare să avem}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\rho_n}(f, \xi^{(n)}, \eta^{(n)}) = I.$$

**Observația 5.2.2.** Din Teorema 5.2.5 și Observația 5.2.1 rezultă că dacă  $f$  este integrabilă pe  $D$ , atunci pentru orice șir  $\{\rho_n\}$  de partiții ale lui  $D$ , care satisface condiția  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\rho_n\| = 0$ , avem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{\rho_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\rho_n} = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Fie  $\{\rho_n\}$  un șir de partiții ale domeniului  $D$  cu proprietatea  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\rho_n\| = 0$ . Subdomeniile partiției  $\rho_n$  care nu au puncte comune cu frontiera lui  $D$ , le numim celule interioare. Reuniunea lor o notăm cu  $P_n$ . Celelalte subdomenii ale partiției  $\rho_n$  le numim celule frontieră și reuniunea lor o notăm cu  $Q_n$ . Evident  $D = P_n \cup Q_n$  și aria  $D = \text{aria } P_n + \text{aria } Q_n$ .

**Observația 5.2.3.**  $\text{aria } D = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{aria } P_n$ .

Într-adevăr, deoarece  $\text{aria } D = \sup \{ \text{aria } E; E \subset D, E \in \mathbf{E} \}$ , rezultă că  $\forall \varepsilon > 0, \exists$  o mulțime elementară  $E_\varepsilon \subset D$  astfel încât

$$\text{aria } D < \text{aria } E_\varepsilon + \varepsilon \quad (5)$$

Mulțimea  $E_\varepsilon$  este formată dintr-un număr finit de dreptunghiuri închise, cu laturile paralele cu axele de coordonate. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că mulțimea  $E_\varepsilon$  este disjunctă de frontiera domeniului  $D$ , deoarece, în caz contrar, putem micșora (comprima) această mulțime pe direcția axelor de coordonate, astfel încât mulțimea obținută să fie disjunctă de frontiera lui  $D$  și să satisfacă în continuare (5). Fie  $R$  un dreptunghi oarecare al mulțimii  $E_\varepsilon$ . Conform Teoremei 5.2.1 distanța de la  $R$  la frontiera lui  $D$  este strict pozitivă. Notăm cu  $\delta$  cea mai mică distanță de la frontiera lui  $D$  la dreptunghiurile mulțimii  $E_\varepsilon$  și considerăm o partiție  $\rho_{n_0}$  cu  $\|\rho_{n_0}\| < \delta$ .

Observăm că  $E_\varepsilon \subset P_{n_0}$ , unde  $P_{n_0}$  este reuniunea tuturor celulelor interioare ale partiției  $\rho_{n_0}$ . Într-adevăr, dacă  $M \in E_\varepsilon$ , atunci există un dreptunghi  $R \subset E_\varepsilon$  astfel încât  $M \in R$ . Deoarece distanța de la  $M$  la frontiera lui  $D$  este mai mare ca  $\delta$ ,

punctul  $M$  nu poate aparține nici unei celule frontieră din partiția  $\rho_{n_0}$ , deci aparține unei celule interioare a partiției  $\rho_{n_0}$ , adică a mulțimii  $P_{n_0}$ . Rezultă că  $\text{aria } D < \text{aria } P_{n_0} + \varepsilon$ , deci

$$\text{aria } D = \sup \left\{ \text{aria } P_n; n \in \mathbb{N}^* \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{aria } P_n.$$

În continuare vom evidenția o consecință importantă a Observației 5.2.3 pentru teoria integralei duble. Fie  $\{\rho_n\}$  un șir de partiții ale domeniului  $D$  de normă tinzând la 0. Celulele interioare ale partiției  $\rho_n$  le notăm cu  $D'_{ni}$ , iar celulele frontieră ale lui  $\rho_n$  le notăm cu  $D''_{nj}$ . Avem  $D = P_n \cup Q_n$  unde  $P_n = \bigcup_i D'_{ni}$  și  $Q_n = \bigcup_j D''_{nj}$ .

Din Observația 5.2.3 deducem că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{aria}(Q_n) = 0 \quad (6)$$

**Observația 5.2.4.** Fie  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție mărginită, integrabilă pe  $D$  și fie  $M'_{ni}$  (respectiv  $M''_{nj}$ ) un punct arbitrar din domeniul  $D'_{ni}$  (respectiv  $D''_{nj}$ ). Atunci avem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_i f(M'_{ni}) \text{aria}(D'_{ni}) = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Într-adevăr, deoarece  $f$  este mărginită pe  $D$ , rezultă că există  $K > 0$  astfel încât  $|f(M)| < K, \forall M \in D$ . În continuare avem:

$$\left| \sum_j f(M''_{nj}) \text{aria}(D''_{nj}) \right| \leq \sum_j |f(M''_{nj})| \text{aria}(D''_{nj}) \leq K \text{aria}(Q_n).$$

Ținând seama de Teorema 5.2.5 și de (6) deducem

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_i f(M'_{ni}) \text{aria}(D'_{ni}) + \sum_j f(M''_{nj}) \text{aria}(D''_{nj}) \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_i f(M'_{ni}) \text{aria}(D'_{ni}). \end{aligned}$$

### 5.3. PROPRIETĂȚILE INTEGRALEI DUBLE

Proprietățile integralei duble sunt analoage cu proprietățile integralei simple. Lăsăm demonstrațiile în seama cititorului.

$$5.3.1. \quad \iint_D 1. dx dy = \text{aria } D.$$

**5.3.2.** Dacă  $f$  și  $g$  sunt integrabile pe  $D$ , atunci  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{P}$ , funcția  $\alpha f + \beta g$  este integrabilă pe  $D$  și

$$\iint_D [\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)] dx dy = \alpha \iint_D f(x, y) dx dy + \beta \iint_D g(x, y) dx dy .$$

**5.3.3.** Dacă  $f$  și  $g$  sunt integrabile pe  $D$  și  $f(x, y) \leq g(x, y)$ ,  $\forall (x, y) \in D$ , atunci

$$\iint_D f(x, y) dx dy \leq \iint_D g(x, y) dx dy .$$

**5.3.4.** Dacă  $f$  este integrabilă pe  $D$ , atunci  $|f|$  este integrabilă pe  $D$  și

$$\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_D |f(x, y)| dx dy .$$

**5.3.5.** Dacă  $f$  este integrabilă pe  $D$  și notăm cu  $m$  (respectiv  $M$ ) marginea inferioară (respectiv superioară) a funcției  $f$  pe  $D$ , atunci există  $m \leq \mu \leq M$  astfel încât

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \mu \text{aria } D .$$

Dacă presupunem în plus că  $f$  este continuă pe  $D$ , atunci există un punct  $(\xi, \eta) \in D$  astfel încât

$$\iint_D f(x, y) dx dy = f(\xi, \eta) \text{aria } D .$$

**5.3.6.** Dacă domeniul  $D$  este reuniunea a două domenii compacte  $D_1$  și  $D_2$  care au arie, fără puncte interioare comune și  $f$  este integrabilă pe  $D_1$  și  $D_2$ , atunci  $f$  este integrabilă pe  $D$  și

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy .$$

## 5.4. MODUL DE CALCUL AL INTEGRALEI DUBLE

**Definiția 5.4.1.** Un domeniu compact  $D$  se numește **simplic în raport cu axa  $Oy$** , dacă există două funcții continue  $\varphi, \psi: [a, b] \rightarrow \mathbb{P}$  astfel încât  $\varphi(x) < \psi(x)$  pentru orice  $a < x < b$  și

$$D = \left\{ (x, y) \in \square^2 \mid a \leq x \leq b; \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \right\} .$$

Un astfel de domeniu este reprezentat în figura 1.

În mod analog, un domeniu  $D$  se numește **simplic în raport cu axa  $Ox$**  dacă există două funcții continue  $u, v: [c, d] \rightarrow \mathbb{P}$  astfel încât  $u(x) < v(x)$  pentru  $c < y < d$  astfel încât

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d; u(x) \leq x \leq v(x)\}.$$

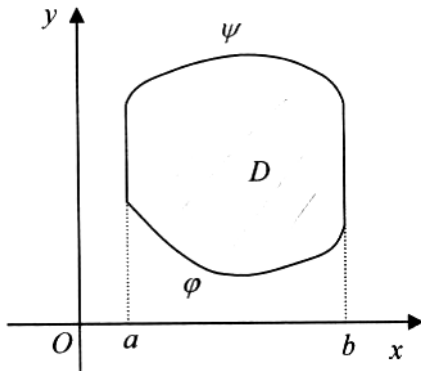


Fig. 1

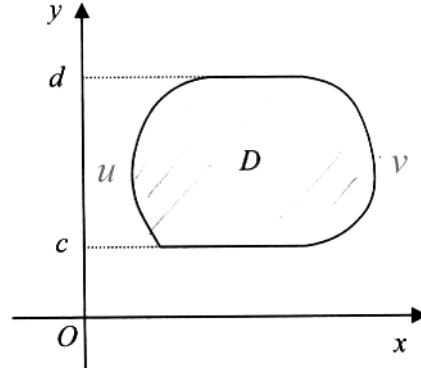


Fig. 2

Un astfel de domeniu este reprezentat în figura 2.

Există domenii compacte care sunt simple în raport cu ambele axe, de exemplu dreptunghiurile, cercurile etc.

**Lema 5.4.1.** Fie  $D$  un domeniu simplu în raport cu axa  $Oy$  și fie  $f: D \rightarrow \mathbb{P}$  o funcție continuă pe  $D$ .

Dacă notăm cu  $m$  (respectiv  $M$ ) marginile funcției  $f$  pe domeniul  $D$  atunci

$$m(\text{aria } D) \leq \int_a^b \left( \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx \leq M(\text{aria } D).$$

*Demonstrație.*

Pentru început, să observăm că din teorema de continuitate a integralei cu parametru (Teorema 3.2.1) rezultă că funcția  $F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$ ,  $x \in [a, b]$ , este continuă pe  $[a, b]$ , deci integrabilă pe  $[a, b]$ . Prin ipoteză avem:

$$m \leq f(x, y) \leq M, \quad \forall (x, y) \in D.$$

Din proprietatea de monotonie a integralei rezultă:

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} m dy \leq \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \leq \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} M dy, \quad \forall x \in [a, b],$$

sau 
$$m[\psi(x) - \varphi(x)] \leq \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \leq M[\psi(x) - \varphi(x)], \quad \forall x \in [a, b].$$

Folosind din nou proprietatea de monotonie a integralei obținem:

$$m \int_a^b [\psi(x) - \varphi(x)] dx \leq \int_a^b \left( \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx \leq M \int_a^b [\psi(x) - \varphi(x)] dx.$$

Rămâne să observăm că  $\int_a^b (\psi(x) - \varphi(x)) dx = \text{aria } D$  (Corolarul 5.1.1) și cu aceasta lema este demonstrată.

**Teorema 5.4.1.** Fie  $D$  un domeniu simplu în raport cu axa  $Oy$  și  $f: D \rightarrow \mathbb{P}$  o funcție continuă. Atunci

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx .$$

*Demonstrație.* Fie  $\Delta_n: a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$ , o diviziune echidistantă a intervalului  $[a, b]$ .

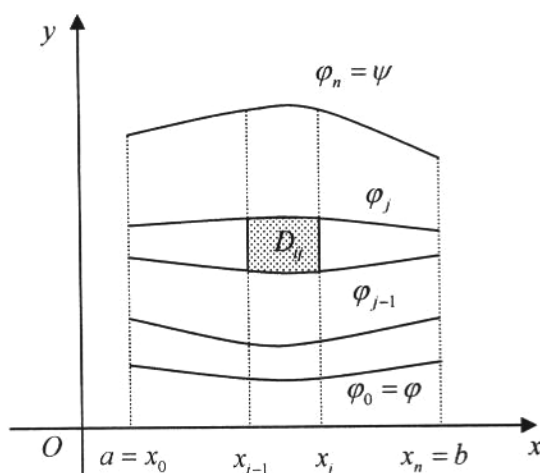


Fig. 3

mile  $(D_{ij})_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}}$ , unde

$$D_{ij} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i, \varphi_{j-1}(x) \leq y \leq \varphi_j(x) \right\} .$$

Observăm că  $\text{diam}(D_{ij}) \leq \frac{b-a}{n} + \frac{1}{n} \|\psi - \varphi\|_\infty, \forall x \in [x_{i-1}, x_i]$ , de unde deducem că  $\|\rho_n\| \rightarrow 0$  când  $n \rightarrow \infty$ .

Fie  $m_{ij}$  (respectiv  $M_{ij}$ ) marginea inferioară (respectiv superioară) a funcției  $f$  pe domeniul  $D_{ij}$ . Din Lema 5.4.1 rezultă

$$m_{ij} \text{ aria } D_{ij} \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left( \int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x, y) dy \right) dx \leq M_{ij} \text{ aria } D_{ij}, \quad i, j = \overline{0, n} .$$

Sumând succesiv după  $i$  și  $j$  obținem:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \text{ aria } D_{ij} \leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left( \sum_{j=1}^n \int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x, y) dy \right) dx \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij} \text{ aria } D_{ij} .$$

Așadar,

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}, \quad \forall i = \overline{1, n} \text{ și}$$

$$\|\Delta_n\| = \frac{b-a}{n} .$$

Considerăm funcțiile

$$\varphi_j: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad j = \overline{0, n} \text{ definite}$$

astfel:

$$\varphi_j(x) = \varphi(x) + \frac{j}{n} [\psi(x) - \varphi(x)],$$

$$\forall x \in [a, b]. \text{ Evident } \varphi_0 = \varphi \text{ și}$$

$$\varphi_n = \psi .$$

Notăm cu  $\rho_n$  partiția domeniului  $D$  formată din mulți-

Deoarece  $\sum_{j=1}^n \int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x, y) dy = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$  și

$$\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left( \int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b \left( \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

rezultă:

$$s_{\rho_n} \leq \int_a^b \left( \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx \leq S_{\rho_n} \quad (1)$$

Cum  $f$  este integrabilă pe  $D$ , din Observația 5.2.2 rezultă că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{\rho_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\rho_n} = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Trecând la limită după  $n$  în inegalitățile (1) obținem

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

**Observația 5.4.1.** Dacă domeniul  $D$  este simplu în raport cu axa  $Ox$ , avem următoarea formulă de calcul

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

**Exemplul 5.4.1.** Să se calculeze  $\iint_D x^2 y dx dy$  unde  $D$  este domeniul mărginit

de curbele  $y = x^2$ ,  $y = 1$ . Observăm că domeniul  $D$  este simplu în raport cu axa

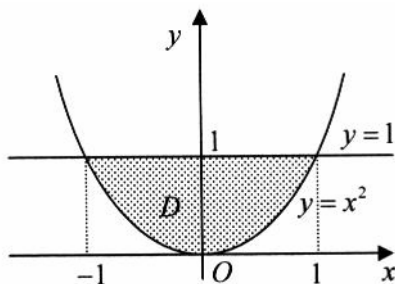


Fig. 4

$$Oy: D = \{ (x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1 \}.$$

Conform Teoremei 5.1.1. avem:

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 y dx dy &= \int_{-1}^1 \left( \int_{x^2}^1 x^2 y dy \right) dx = \\ &= \int_{-1}^1 \left( x^2 \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_{x^2}^1 \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x^2 - x^6) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{7} = \frac{4}{21}. \end{aligned}$$

Pe de altă parte, este ușor de observat că domeniul  $d$  este simplu și în raport cu axa  $Ox$ . Într-adevăr  $D = \{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, -\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y} \}$ . Așadar avem

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 y \, dx \, dy &= \int_0^1 \left( \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x^2 y \, dx \right) dy = \int_0^1 \left( y \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \right) dy = \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 y^2 \sqrt{y} \, dy = \frac{2}{3} \frac{y^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} \Big|_0^1 = \frac{4}{21}. \end{aligned}$$

### 5.5. SCHIMBAREA VARIABILELOR ÎN INTEGRALA DUBLĂ

Fie  $\Omega \subset \square^2$  un domeniu mărginit care are arie, fie funcția vectorială  $F : \bar{\Omega} \rightarrow \square^2$ , definită prin  $F(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ ,  $(u, v) \in \bar{\Omega}$  și fie  $D \subset \square^2$  imaginea directă a domeniului  $\Omega$  prin funcția vectorială  $F$ . Presupunem că funcția  $F$  are următoarele proprietăți:

- (i)  $F$  este de clasă  $C^1$  pe  $\bar{\Omega}$ .
- (ii)  $F : \Omega \rightarrow D$  este bijectivă.
- (iii) Transformarea  $F$  este o transformare regulată pe  $\Omega$ , adică iacobianul său

$$\det J_F(u, v) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}(u, v) \neq 0, \quad \forall (u, v) \in \Omega.$$

În aceste condiții rezultă că  $\bar{D} = F(\bar{\Omega})$  este la rândul său un domeniu compact și că iacobianul transformării  $F$  păstrează semn constant pe  $\Omega$ . O astfel de funcție vectorială se mai numește și schimbare de coordonate sau schimbare de variabile.

**Observația 5.5.1.** O schimbare de variabile transformă o curbă netedă pe porțiuni din domeniul  $\Omega$ , într-o curbă netedă pe porțiuni din domeniul  $D$ . Fie  $\gamma \subset \Omega$  o curbă netedă și fie  $\rho(t) = (u(t), v(t))$ ,  $t \in [a, b]$  o reprezentare parametrică a sa. Dacă notăm cu  $C = F(\gamma)$ , atunci  $r(t) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)))$ ,  $t \in [a, b]$  este o reprezentare parametrică a curbei  $C \subset D$ . Ținând seama de formulele de calcul pentru derivatele parțiale ale funcțiilor compuse obținem:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial u}[u(t), v(t)] \cdot u'(t) + \frac{\partial x}{\partial v}[u(t), v(t)] \cdot v'(t) \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial u}[u(t), v(t)] \cdot u'(t) + \frac{\partial y}{\partial v}[u(t), v(t)] \cdot v'(t) \end{cases}$$

Dacă presupunem, prin absurd că  $C$  nu este netedă, rezultă că există  $t_0 \in (a, b)$  astfel încât  $\frac{dx}{dt}[u(t_0), v(t_0)] = 0$  și  $\frac{dy}{dt}[u(t_0), v(t_0)] = 0$ , deci

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u}[u(t_0), v(t_0)] \cdot u'(t_0) + \frac{\partial x}{\partial v}[u(t_0), v(t_0)] \cdot v'(t_0) = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u}[u(t_0), v(t_0)] \cdot u'(t_0) + \frac{\partial y}{\partial v}[u(t_0), v(t_0)] \cdot v'(t_0) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Cum prin ipoteză  $(u'(t_0))^2 + (v'(t_0))^2 > 0$ , rezultă că sistemul (1) admite soluție nebanală. Așadar, avem:

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)}[u(t_0), v(t_0)] = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}[u(t_0), v(t_0)] & \frac{\partial x}{\partial v}[u(t_0), v(t_0)] \\ \frac{\partial y}{\partial u}[u(t_0), v(t_0)] & \frac{\partial y}{\partial v}[u(t_0), v(t_0)] \end{vmatrix} = 0,$$

ceea ce contrazice faptul că  $F$  este o transformare regulată.

**Observația 5.5.2.** Printr-o schimbare de variabile, orice punct de pe frontiera domeniului  $D$ , corespunde unui punct de pe frontiera domeniului  $\Omega$  și reciproc. Cu alte cuvinte  $F(\text{fr}\Omega) = \text{fr}D$ .

Într-adevăr, să presupunem că  $(x_0, y_0) \in \text{fr}D$  și că există  $(u_0, v_0) \in \Omega$  astfel încât  $x_0 = x(u_0, v_0)$ ,  $y_0 = y(u_0, v_0)$ . Cum transformarea  $F$  este regulată în punctul  $(u_0, v_0)$ , din teorema de inversiune locală rezultă că  $(x_0, y_0)$  este un punct interior domeniului  $D$ , ceea ce este absurd.

În cele ce urmează prezentăm noțiunea de modul de continuitate al unei funcții și principalele sale proprietăți, care vor interveni în demonstrația teoremei schimbării de variabile.

**Definiția 5.5.1.** Fie  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , unde  $A$  este o mulțime oarecare și fie  $\delta > 0$  oarecare. Vom nota cu

$$\omega(\delta, f) = \sup \{ |f(M') - f(M'')|; M', M'' \in A, \text{dist}(M', M'') < \delta \}.$$

Se observă imediat că dacă  $0 < \delta_1 < \delta_2$  atunci  $\omega(\delta_1, f) < \omega(\delta_2, f)$ .

**Observația 5.5.3.** O funcție  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  este uniform continuă pe  $A$ , dacă și numai dacă  $\lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \delta > 0}} \omega(\delta, f) = 0$ .

Într-adevăr, prin ipoteză, pentru  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \eta_\varepsilon > 0$  cu proprietatea că pentru orice  $M', M'' \in A$  cu  $\text{dist}(M', M'') < \eta_\varepsilon$  avem  $|f(M') - f(M'')| < \varepsilon$ . Rezultă că dacă  $0 < \delta < \eta_\varepsilon$ , atunci  $\omega(\delta, f) < \varepsilon$ , deci  $\lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \delta > 0}} \omega(\delta, f) = 0$ . Demonstrația afirmației reciproce este asemănătoare.



**Observația 5.5.4.** Dacă  $A$  este convexă, atunci pentru orice  $\delta_1 > 0$ ,  $\delta_2 > 0$  avem  $\omega(\delta_1 + \delta_2, f) \leq \omega(\delta_1, f) + \omega(\delta_2, f)$ . În particular, rezultă

$$\omega(m\delta, f) \leq \omega(\delta, f), \quad \forall m \in \mathbb{Q}^+.$$

Într-adevăr, fie  $M', M'' \in A$  cu  $\text{dist}(M', M'') < \delta_1 + \delta_2$  și fie

$M = \frac{\delta_2}{\delta_1 + \delta_2} M' + \frac{\delta_1}{\delta_1 + \delta_2} M''$ . Evident  $M$  aparține segmentului de dreaptă de capete  $M'$  și  $M''$ , deci  $M \in A$ , deoarece  $A$  este convexă. În continuare avem:

$$M - M' = \frac{\delta_1}{\delta_1 + \delta_2} (M'' - M') \quad \text{și} \quad M'' - M = \frac{\delta_2}{\delta_1 + \delta_2} (M'' - M'), \quad \text{deci}$$

$$\text{dist}(M, M') = \|M - M'\| = \frac{\delta_1}{\delta_1 + \delta_2} \|M'' - M'\| < \frac{\delta_1}{\delta_1 + \delta_2} (\delta_1 + \delta_2) = \delta_1$$

$$\text{dist}(M, M'') = \|M - M''\| = \frac{\delta_2}{\delta_1 + \delta_2} \|M'' - M'\| < \frac{\delta_2}{\delta_1 + \delta_2} (\delta_1 + \delta_2) = \delta_2.$$

Așadar,  $\exists M \in A$  astfel încât  $\text{dist}(M, M') < \delta_1$ ,  $\text{dist}(M, M'') < \delta_2$ .

Pentru orice  $M', M'' \in A$  cu  $\text{dist}(M', M'') < \delta_1 + \delta_2$  avem

$$|f(M') - f(M'')| \leq |f(M') - f(M)| + |f(M) - f(M'')| < \omega(\delta_1, f) + \omega(\delta_2, f),$$

deci  $\omega(\delta_1 + \delta_2, f) \leq \omega(\delta_1, f) + \omega(\delta_2, f)$ .

Fie  $F: \bar{\Omega} \rightarrow \bar{D}$ ,  $F(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ ,  $(u, v) \in \bar{\Omega}$  o schimbare de variabile. Notăm cu

$$\omega(h) = \max \left\{ \omega\left(h, \frac{\partial x}{\partial u}\right); \omega\left(h, \frac{\partial x}{\partial v}\right); \omega\left(h, \frac{\partial y}{\partial u}\right); \omega\left(h, \frac{\partial y}{\partial v}\right) \right\},$$

unde, de exemplu,  $\omega\left(h, \frac{\partial x}{\partial u}\right)$  este modulul de continuitate al funcției  $\frac{\partial x}{\partial u}$  pe mulțimea  $\Omega$ , calculat în punctul  $h$ , deci

$$\omega\left(h, \frac{\partial x}{\partial u}\right) = \sup \left\{ \left| \frac{\partial x}{\partial u}(M') - \frac{\partial x}{\partial u}(M'') \right|; M', M'' \in \Omega, \text{dist}(M', M'') < h \right\}.$$

Deoarece  $x, y \in C^1(\bar{\Omega})$ , rezultă că  $\lim_{h \rightarrow 0} \omega(h) = 0$ .

**Lema 5.5.1.** Fie  $F: \bar{\Omega} \rightarrow \bar{D}$ ,  $F(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ ,  $(u, v) \in \bar{\Omega}$  o schimbare de variabile, fie  $\Delta = (a, a+h) \times (b, b+h) \subset \Omega$  și fie  $P = F(\Delta) \subset D$  imaginea directă a pătratului  $\Delta$  prin transformarea  $F$ . Atunci

$$\text{aria } P = \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)}(a, b) \right| \text{aria } \Delta + \varphi(h) \quad \text{unde} \quad |\varphi(h)| \leq Kh^2 \omega(h),$$

$K$  fiind o constantă independentă de  $h$  și de punctul  $A(a,b)$ .

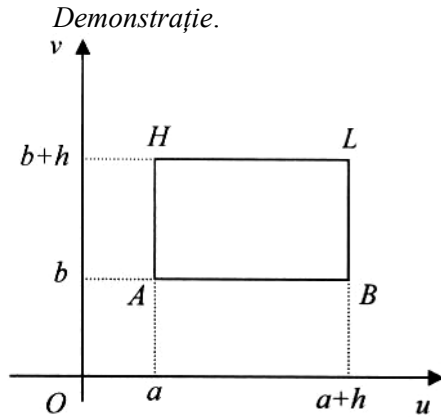


Fig. 1

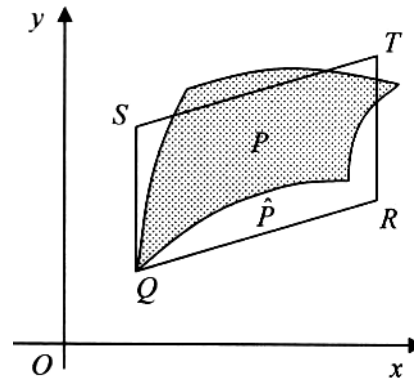


Fig. 2

Fie  $c = x(a,b)$  și  $d = y(a,b)$ . Din Teorema Lagrange rezultă că există două puncte  $(\xi, \eta)$ ,  $(\xi', \eta')$  pe segmentul de dreaptă deschis de capete  $(a,b)$  și  $(u,v)$  astfel încât:

$$\begin{cases} x(u,v) = c + \frac{\partial x}{\partial u}(\xi, \eta)(u-a) + \frac{\partial x}{\partial v}(\xi, \eta)(v-b) \\ y(u,v) = d + \frac{\partial y}{\partial u}(\xi', \eta')(u-a) + \frac{\partial y}{\partial v}(\xi', \eta')(v-b) \end{cases} \quad (2)$$

Dacă notăm cu

$$\alpha = \left( \frac{\partial x}{\partial u}(\xi, \eta) - \frac{\partial x}{\partial u}(a,b) \right)(u-a) + \left( \frac{\partial x}{\partial v}(\xi, \eta) - \frac{\partial x}{\partial v}(a,b) \right)(v-b) \text{ și}$$

$$\beta = \left( \frac{\partial y}{\partial u}(\xi', \eta') - \frac{\partial y}{\partial u}(a,b) \right)(u-a) + \left( \frac{\partial y}{\partial v}(\xi', \eta') - \frac{\partial y}{\partial v}(a,b) \right)(v-b), \text{ atunci}$$

$$\begin{cases} x(u,v) = c + \frac{\partial x}{\partial u}(a,b)(u-a) + \frac{\partial x}{\partial v}(a,b)(v-b) + \alpha \\ y(u,v) = d + \frac{\partial y}{\partial u}(a,b)(u-a) + \frac{\partial y}{\partial v}(a,b)(v-b) + \beta \end{cases} \quad (3)$$

În continuare considerăm transformarea afină

$$\begin{cases} \hat{x}(u,v) = c + \frac{\partial x}{\partial u}(a,b)(u-a) + \frac{\partial x}{\partial v}(a,b)(v-b) \\ \hat{y}(u,v) = d + \frac{\partial y}{\partial u}(a,b)(u-a) + \frac{\partial y}{\partial v}(a,b)(v-b) \end{cases} \quad (4)$$

Fie  $\hat{F} : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{D}$  funcția vectorială  $\hat{F}(u, v) = (\hat{x}(u, v), \hat{y}(u, v))$ ,  $(u, v) \in \bar{\Omega}$  și fie  $\hat{P} = \hat{F}(\Delta)$  imaginea directă a pătratului  $\Delta$  prin transformarea afină  $\hat{F}$ . Ținând seama de coordonatele vârfurilor  $A, B, H, L$  ale pătratului  $\Delta$  rezultă coordonatele vârfurilor patrulaterului  $\hat{P} = QRST$ , anume

$$Q = \hat{F}(A) = (c, d)$$

$$R = \hat{F}(B) = \left( c + \frac{\partial x}{\partial u}(a, b)h, d + \frac{\partial y}{\partial u}(a, b)h \right)$$

$$T = \hat{F}(L) = \left( c + \frac{\partial x}{\partial u}(a, b)h + \frac{\partial x}{\partial v}(a, b)h, d + \frac{\partial y}{\partial u}(a, b)h + \frac{\partial y}{\partial v}(a, b)h \right)$$

$$S = \hat{F}(H) = \left( c + \frac{\partial x}{\partial v}(a, b)h, d + \frac{\partial y}{\partial v}(a, b)h \right)$$

Se observă că dreptele  $QR$  și  $ST$  sunt paralele și că

$$\|\overline{QR}\| = \|\overline{ST}\| = h \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial u}(a, b) \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial u}(a, b) \right)^2}. \text{ Prin urmare, patrulaterul } QRST \text{ este}$$

un paralelogram. Aria sa este egală cu mărimea produsului vectorial

$$\begin{aligned} \overline{QR} \times \overline{QS} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u}(a, b)h & \frac{\partial y}{\partial u}(a, b)h & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v}(a, b)h & \frac{\partial y}{\partial v}(a, b)h & 0 \end{vmatrix} = \\ &= h^2 \left( \frac{\partial x}{\partial u}(a, b) \frac{\partial y}{\partial v}(a, b) - \frac{\partial x}{\partial v}(a, b) \frac{\partial y}{\partial u}(a, b) \right) \vec{k}. \end{aligned}$$

Așadar, avem:

$$\text{aria } \hat{P} = \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)}(a, b) \right| h^2 \quad (5)$$

Mai reținem că

$$\|\overline{QS}\| = \|\overline{RT}\| = h \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial v}(a, b) \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial v}(a, b) \right)^2} \quad (6)$$

Să estimăm acum distanța de la un punct oarecare  $M(x, y) \in P$  la punctul corespunzător  $\hat{M}(\hat{x}, \hat{y}) \in \hat{P}$ . Din (3) și (4) rezultă că  $\text{dist}(M, \hat{M}) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ . Pe de altă parte, ținând seama de proprietățile modulului de continuitate, pentru  $(u, v) \in \Delta$  obținem

$$|\alpha(u, v)| \leq \omega \left( \sqrt{2}h, \frac{\partial x}{\partial u} \right) h + \omega \left( \sqrt{2}h, \frac{\partial x}{\partial v} \right) h \leq 2\omega(\sqrt{2}h)h \leq 2\omega(2h)h \leq 4\omega(h)h$$

Absolut analog se arată că  $|\beta(u, v)| \leq 4\omega(h)h$ . Așadar, avem:

$$\text{dist}(M, \hat{M}) \leq \sqrt{32\omega^2(h)h^2} \leq 6\omega(h)h = r \quad (7)$$

Notăm cu  $\Gamma$  reuniunea tuturor discurilor de rază  $r$  care au centrul în punctul  $\hat{M}$ , când  $\hat{M}$  parcurge frontiera paralelogramului  $\hat{P}$ . Aria mulțimii  $\Gamma$  este mai mică decât suma ariilor celor patru cercuri de rază  $r$  cu centrele în vârfurile paralelogramului  $\hat{P}$ , plus aria celor patru dreptunghiuri de lățime  $2r$  construite pe laturile paralelogramului  $\hat{P}$ . Rezultă că

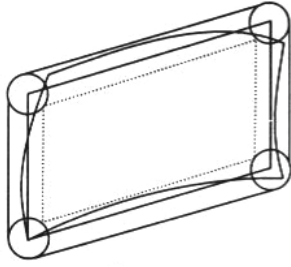


Fig. 3

aria  $(\Gamma) \leq 4\pi r^2 + 4r(\|\overline{QR}\| + \|\overline{QS}\|)$ .

Deoarece  $x, y \in C^1(\overline{\Omega})$ , rezultă că derivatele lor parțiale de ordinul I sunt mărginite pe  $\overline{\Omega}$ , deci  $\|\overline{QR}\| < K_1h$ ,  $\|\overline{QS}\| < K_1h$ , unde  $K_1 > 0$  este o

constantă. Prin urmare avem:

$$\text{aria}(\Gamma) \leq 4\pi 36\omega^2(h)h^2 + 48\omega(h)h^2K_1 \leq K\omega(h)h^2 \quad (8)$$

unde  $K$  este o constantă pozitivă independentă de  $h$  și de  $A(a, b)$ .

Observăm că  $P \setminus \hat{P} \subset \Gamma$ .

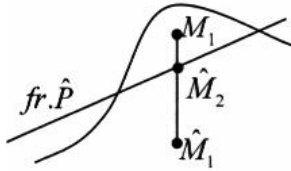


Fig. 4

Într-adevăr, fie  $M_1 \in P \setminus \hat{P}$  și fie  $(u_1, v_1) \in \overline{\Delta}$  astfel încât  $M_1 = F(u_1, v_1)$ . Dacă notăm cu  $\hat{M}_1 = \hat{F}(u_1, v_1)$ , atunci  $\hat{M}_1 \in \hat{P}$  și  $\text{dist}(M_1, \hat{M}_1) < r$ . Cum  $M_1 \notin \hat{P}$ , rezultă că segmentul de dreaptă  $\hat{M}_1M_1$  întâlnește frontiera lui  $\hat{P}$ .

Fie  $\hat{M}_2 \in \hat{M}_1M_1 \cap \text{fr.}\hat{P}$ . Avem  $\text{dist}(M_1, \hat{M}_2) < \text{dist}(M_1, \hat{M}_1) < r$ , deci  $M_1 \in \Gamma$ .

În continuare avem:  $P = \hat{P} \cup (P \setminus \hat{P})$  de unde rezultă că:  $\text{aria } P = \text{aria } \hat{P} + \text{aria}(P \setminus \hat{P})$ .

Cum  $\text{aria}(P \setminus \hat{P}) \leq \text{aria } \Gamma$ , deducem că există  $\theta \in (0, 1)$  astfel încât  $\text{aria}(P) = \text{aria}(\hat{P}) + \theta \cdot \text{aria}(\Gamma)$ . Din (5) și (8) obținem

$$\text{aria}(P) = \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)}(a, b) \right| h^2 + \theta \cdot K\omega(h)h^2.$$

În sfârșit, dacă notăm  $\varphi(h) = \theta \cdot K\omega(h)h^2$  atunci  $|\varphi(h)| \leq K \cdot \omega(h)h^2$  și

$$\text{aria}(P) = \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)}(a, b) \right| h^2 + \varphi(h).$$

Cu aceasta lema este demonstrată.

**Teorema 5.5.1.** Fie  $F : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{D}$ ,  $F(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ ,  $(u, v) \in \bar{\Omega}$  o schimbare de variabile și fie  $f : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă. Atunci

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega} f[x(u, v), y(u, v)] \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)}(u, v) \right| du dv.$$

*Demonstrație.* Fie  $m \in \mathbb{N}^*$  un număr natural oarecare, fie  $h = 2^{-m}$  și fie familiile de drepte  $x = kh$ ,  $y = lh$ ,  $k, l \in \mathbb{N}$ .

Notăm cu  $S_m$  rețeaua de pătrate determinată de aceste drepte și cu  $\rho_m$  partiția domeniului  $\Omega$  determinată de această rețea.

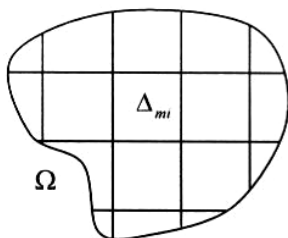


Fig. 5

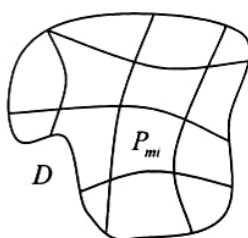


Fig. 6

Fie  $\Delta_{mi}$  un pătrat interior oarecare al rețelei  $S_m$  și fie  $P_{mi} = F(\Delta_{mi})$  imaginea directă a pătratului  $\Delta_{mi}$  prin transformarea  $F$ . Din Lema 5.5.1 rezultă că

$$\text{aria}(P_{mi}) = \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)}(M_{mi}) \right| \text{aria}(\Delta_{mi}) + \psi(h) \cdot \text{aria}(\Delta_{mi}) \text{ unde } |\psi(h)| \leq K\omega(h),$$

iar  $M_{mi}$  este un punct din pătratul  $\Delta_{mi}$ . Dacă notăm cu  $Q_{mi} = F(M_{mi}) \in P_{mi}$  și ținem seama că funcțiile  $f$ ,  $x$  și  $y$  sunt continue și mărginite rezultă

$$\left| \sum_i f(Q_{mi}) \text{aria}(P_{mi}) - \sum_i f[x(M_{mi}), y(M_{mi})] \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)}(M_{mi}) \right| \text{aria}(\Delta_{mi}) \right| \leq K'\omega(h) \sum_i \text{aria}(\Delta_{mi}) = K'\omega(h) \text{aria}(\Omega).$$

Cum funcțiile  $f$  și  $f \circ F$  sunt continue, deci integrabile și  $\lim_{h \rightarrow 0} \omega(h) = 0$ , din

Observația 5.2.4 deducem că

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_i f(Q_{mi}) \text{aria}(P_{mi}) = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_i f[x(M_{mi}), y(M_{mi})] \text{aria}(\Delta_{mi}) = \\ &= \iint_{\Omega} f[x(u, v), y(u, v)] \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)}(u, v) \right| du dv. \end{aligned}$$

Cel mai utilizat tip de schimbare de variabile este trecerea la coordonate polare:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \quad \rho > 0, \quad 0 < \theta < 2\pi \quad (9)$$

Dacă notăm cu  $A = \{(\theta, \rho) \mid 0 < \theta < 2\pi, 0 < \rho < \infty\}$ , cu  $B = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0), x \geq 0\}$  și cu  $F(\theta, \rho) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ , atunci  $F: A \rightarrow B$  este o transformare regulată (iacobianul său  $J_F(\rho, \theta) = \frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} = \rho > 0$ ).

Fie  $0 < \alpha < \beta < 2\pi$  și fie  $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă. Notăm cu  $\Omega = \{(\theta, \rho) \mid \alpha < \theta < \beta; 0 < \rho < \varphi(\theta)\}$  și cu  $D = F(\Omega)$ , atunci  $F: \bar{\Omega} \rightarrow \bar{D}$  este o schimbare de variabile. Dacă  $f: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție continuă, atunci din Teorema 5.5.1 rezultă:

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_{\Omega} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left( \int_0^{\varphi(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho \right) d\theta \end{aligned} \quad (10)$$

Deoarece mulțimea  $\bar{D} \setminus D$  (respectiv  $\bar{\Omega} \setminus \Omega$ ) este de arie zero, rezultă că este valabilă și egalitatea

$$\iint_{\bar{D}} f(x, y) dx dy = \iint_{\bar{\Omega}} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \quad (11)$$

**Exemplul 5.5.1.** Să se calculeze  $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ , unde

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 < a^2, \frac{x}{\sqrt{3}} < y < x\sqrt{3}, x > 0 \right\}.$$

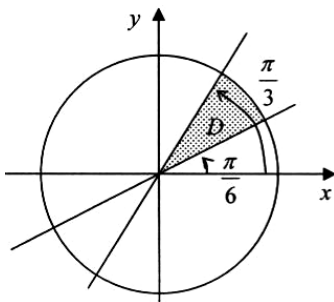


Fig. 7

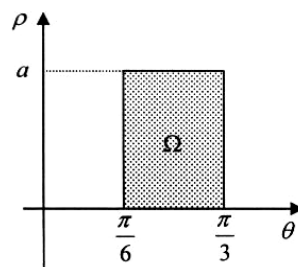


Fig. 8

În acest caz  $\Omega = F^{-1}(D)$  este dreptunghiul  $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right) \times (0, a)$ .

Într-adevăr, înlocuind în inegalitățile care definesc domeniul  $D$  pe  $x$  și  $y$  cu  $\rho \cos \theta$  și  $\rho \sin \theta$  rezultă:

$$\Omega = \left\{ (\theta, \rho) \mid \rho^2 < a^2, \frac{\cos \theta}{\sqrt{3}} < \sin \theta < \sqrt{3} \cos \theta \right\} =$$

$$= \left\{ (\theta, \rho) \mid 0 < \rho < a; \frac{1}{\sqrt{3}} < \operatorname{tg} \theta < \sqrt{3} \right\} = \left( \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right) \times (0, a)$$

Așadar, avem

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy &= \iint_{\Omega} (\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta) \rho d\rho d\theta = \\ &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \left( \int_0^a \rho^3 d\rho \right) d\theta = \frac{\pi a^4}{24}. \end{aligned}$$

**Exemplul 5.5.2.** Să se calculeze  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , unde

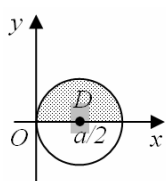


Fig. 9

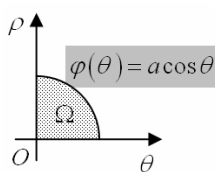


Fig. 10

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 < 2ax, y > 0 \right\}.$$

Observăm că ecuația  $x^2 + y^2 - 2ax = 0$  este ecuația cercului cu centrul în punctul  $(a, 0)$  și de rază  $r = a$ . Înlocuind  $x$  și  $y$  cu  $\rho \cos \theta$  și  $\rho \sin \theta$  în inegalitățile ce definesc  $D$  obținem

$$\Omega = \left\{ (\theta, \rho) \mid \rho^2 < 2a\rho \cos \theta, \rho \sin \theta > 0 \right\} = \left\{ (\theta, \rho) \mid 0 < \rho < a \cos \theta, 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy &= \int_0^{\pi/2} \left( \int_0^{a \cos \theta} \rho^2 d\rho \right) d\theta = \frac{a^3}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta d\theta = \\ &= \frac{a^3}{3} \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 \theta) \cos \theta d\theta = \frac{2a^3}{9} \end{aligned}$$

**Exemplul 5.5.3.** Să se calculeze  $\iint_D (y - x + 2) dx dy$ , unde

$$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1 \right\}. \text{ Ecuația } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ este ecuația unei elipse de semiaxe}$$

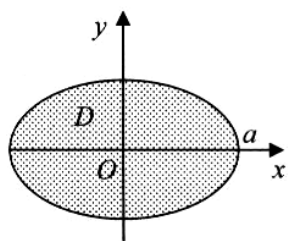


Fig. 11

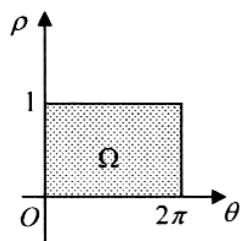


Fig. 12

$a$  și  $b$ . În acest caz se folosesc coordonate polare generalizate și anume

$$\begin{cases} x = a\rho \cos \theta \\ y = b\rho \sin \theta \end{cases}$$

$0 < \rho < 1$  și  $0 < \theta < 2\pi$ .

Iacobianul transformării este  $ab\rho$ .

$$\begin{aligned} \iint_D (y-x+2) dx dy &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 (b\rho \sin \theta - a\rho \cos \theta + 2) ab\rho \right) d\rho d\theta = \\ &= ab^2 \int_0^{2\pi} \sin \theta \cdot \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^1 d\theta - a^2b \int_0^{2\pi} \cos \theta \cdot \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^1 d\theta + 2ab \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^1 d\theta = 2\pi ab. \end{aligned}$$

## 5.6. APLICAȚII ALE INTEGRALEI DUBLE ÎN GEOMETRIE ȘI MECANICĂ

O primă aplicație a integralei duble în geometrie a fost evidențiată în proprietățile integralei duble și anume: aria  $D = \iint_D 1 \cdot dx dy$ , unde  $D \subset \square^2$ , este un domeniu mărginit care are arie.

Fie  $f: \bar{D} \rightarrow \square$  o funcție integrabilă, fie  $\rho: D_1, D_2, \dots, D_n$  o partiție a domeniului  $D$  și fie  $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$  un punct arbitrar. Reamintim că:

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{\|\rho\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \text{aria } D_i,$$

sensul exact fiind următorul:

Pentru orice  $\varepsilon > 0$ , există  $\delta_\varepsilon > 0$  astfel încât, oricare ar fi partiția  $\rho$  a domeniului  $D$ , cu  $\|\rho\| < \delta_\varepsilon$  și oricare ar fi punctele intermediare  $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ , avem:

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \text{aria } D_i - I \right| < \varepsilon.$$

### 5.6.1. Masa unei plăci plane

Prin placă plană înțelegem o placă având forma unui domeniu mărginit  $D \subset \square^2$ , care are arie. Placa este considerată în general neomogenă, densitatea sa fiind dată de funcția continuă  $f: D \rightarrow \square_+$ .

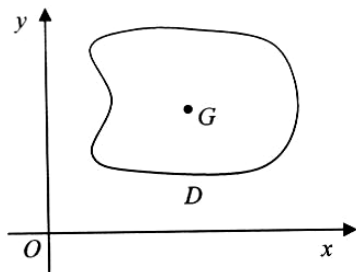


Fig. 1

Fie  $\rho: D_1, D_2, \dots, D_n$  o partiție oarecare a domeniului  $D$  și fie  $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$  arbitrar. Masa plăcii  $D_i$  se aproximează cu produsul  $f(\xi_i, \eta_i) \cdot \text{aria } D_i$ . Aproximarea este cu atât mai bună cu cât norma partiției  $\rho$  este mai mică. Prin urmare avem:

$$\text{masa}(D) \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \text{aria } D_i \text{ și mai departe:}$$



$$\text{masa}(D) = \lim_{\|\rho\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \text{aria } D_i = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

### 5.6.2. Coordonatele centrului de greutate al unei plăci plane

Fie  $D$  o placă neomogenă de densitățile  $f: \bar{D} \rightarrow \square_+$  și fie  $(x_G, y_G)$  coordonatele centrului său de greutate  $G$ . Considerăm ca mai înainte o partiție  $\rho: D_1, D_2, \dots, D_n$  și niște puncte arbitrare  $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ . Masa plăcii  $D_i$  se aproximează cu produsul  $f(\xi_i, \eta_i) \cdot \text{aria } D_i$ . Dacă vom considera masa plăcii  $D_i$  concentrată într-un singur punct și anume în punctul  $(\xi_i, \eta_i)$ , atunci coordonatele centrului de greutate vor fi:

$$x_G \cong \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i f(\xi_i, \eta_i) \text{aria } D_i}{\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \text{aria } D_i}, \quad y_G \cong \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i f(\xi_i, \eta_i) \text{aria } D_i}{\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \text{aria } D_i}.$$

Presupunând că  $f$  este continuă pe  $D$ , la limită obținem:

$$x_G = \lim_{\|\rho\| \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i f(\xi_i, \eta_i) \text{aria } D_i}{\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \text{aria } D_i} = \frac{\iint_D x f(x, y) dx dy}{\iint_D f(x, y) dx dy}$$

$$y_G = \lim_{\|\rho\| \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i f(\xi_i, \eta_i) \text{aria } D_i}{\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \text{aria } D_i} = \frac{\iint_D y f(x, y) dx dy}{\iint_D f(x, y) dx dy}.$$

În cazul particular al unei plăci omogene ( $f(x, y) = \kappa, \forall (x, y) \in D$ ) rezultă:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_G = \frac{\iint_D x dx dy}{\iint_D dx dy} \\ y = \frac{\iint_D y dx dy}{\iint_D dx dy} \end{array} \right.$$

**Exemplul 5.6.1.** Să se afle coordonatele centrului de greutate al unei plăci plane omogene care are forma domeniului

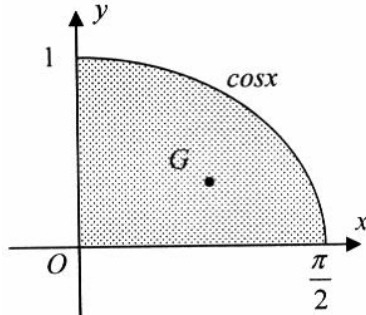


Fig. 2

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq y \leq \cos x \right\}.$$

Avem

$$\iint_D dx dy = \int_0^{\pi/2} \left( \int_0^{\cos x} dy \right) dx =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos x dx = 1$$

$$\iint_D x dx dy = \int_0^{\pi/2} \left( \int_0^{\cos x} x dy \right) dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} x \cos x dx =$$

$$= x \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \frac{\pi}{2} + \cos x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

$$\iint_D y dx dy = \int_0^{\pi/2} \left( \int_0^{\cos x} y dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2x) dx = \frac{\pi}{8}.$$

Așadar, avem

$$\begin{cases} x_G = \frac{\pi}{2} - 1 \\ y_G = \frac{\pi}{8} \end{cases}.$$

### 5.6.3. Momentul de inerție al unei plăci plane

Se știe că momentul de inerție al unui punct material în raport cu o anumită axă este egal cu produsul dintre masa punctului și pătratul distanței de la punct la axă. În cazul unui sistem de puncte materiale, momentul de inerție în raport cu o axă este suma momentelor de inerție ale punctelor materiale care formează sistemul.

Fie  $D$  o placă plană de densitate continuă  $f: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , fie  $\rho: D_1, D_2, \dots, D_n$  o partiție oarecare a sa și fie  $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$  oarecare. Aproximăm ca și mai înainte masa plăcii  $D_i$  cu produsul  $f(\xi_i, \eta_i) \cdot \text{aria}(D_i)$  și considerăm această masă concentrată în punctul  $(\xi_i, \eta_i)$ . Momentul de inerție al acestui sistem de puncte

materiale în raport cu axa  $Oy$  va fi egal cu suma:  $\sum_{i=1}^n \xi_i^2 f(\xi_i, \eta_i) \cdot \text{aria}(D_i)$ .

Dacă nrma partiției  $\rho$  este mică, această sumă poate fi considerată ca o valoare aproximativă a momentului de inerție  $I_y$  al plăcii plane  $D$  în raport cu axa  $Oy$ . La limită avem:

$$I_y = \lim_{\|\rho\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \xi_i^2 f(\xi_i, \eta_i) \cdot \text{aria}(D_i) = \iint_D x^2 f(x, y) dx dy.$$

În mod analog momentul de inerție în raport cu axa  $Ox$  este

$$I_x = \iint_D y^2 f(x, y) dx dy.$$

Dacă placa plană este omogenă de densitate  $f(x, y) = 1, \forall (x, y)$  atunci

$$I_y = \iint_D x^2 dx dy, \quad I_x = \iint_D y^2 dx dy.$$

De asemenea, se poate calcula momentul de inerție al plăcii  $D$  în raport cu originea  $O(0,0)$ . Obținem formulele

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) f(x, y) dx dy \text{ respectiv } I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy.$$

**Exemplul 5.6.2.** Să se afle momentul de inerție în raport cu axa  $Oy$  (respectiv în raport cu originea) a plăcii plane omogene  $D$  de densitate 1, unde:

$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq r^2; x \geq 0, y \geq 0\}$ . Avem

$$\begin{aligned} I_y &= \iint_D x^2 dx dy = \int_0^{\pi/2} \left( \int_0^r \rho^2 \cos^2 \theta \cdot \rho d\rho \right) d\theta = \frac{r^4}{4} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = \\ &= \frac{r^4}{8} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2\theta) d\theta = \frac{\pi r^4}{16} \end{aligned}$$

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{\pi/2} \left( \int_0^r \rho^2 \cdot \rho d\rho \right) d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{r^4}{4} d\theta = \frac{\pi r^4}{8}.$$

## 5.7. FORMULA LUI GREEN

Formula lui Green face legătura între integrala dublă și integrala curbilinie de speța a doua.

Fie  $D \subset \square^2$  un domeniu mărginit a cărui frontieră  $C$  este o curbă netedă pe porțiuni și constă dintr-o reuniune finită de curbe simple închise. Fie  $P, Q: \bar{D} \rightarrow \square$  două funcții continue cu proprietatea că există  $\frac{\partial P}{\partial y}$  și  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  și sunt continue pe  $\bar{D}$ .

Cu aceste precizări formula lui Green este următoarea:

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C^{\leftarrow} P dx + Q dy \quad (1)$$

În această formulă orientarea curbei  $C$  (sensul de parcurgere al curbei  $C$ ) este aleasă astfel încât domeniul  $D$  să rămână la stânga.

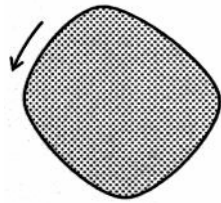


Fig. 1

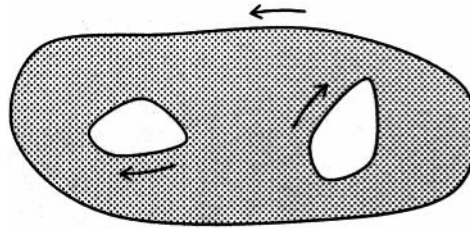


Fig. 2

În figura 1 am exemplificat orientarea curbei  $C = \text{fr}D$  pentru domeniul a cărui frontieră constă dintr-o singură curbă închisă, iar în figura 2 pentru un domeniu a cărui frontieră constă într-o reuniune finită de mai multe curbe închise.

**Definiția 5.7.1** Prin domeniu elementar de tip Green ( $G$  – domeniu elementar) vom înțelege oricare din cele cinci domenii reprezentate în figura 3.

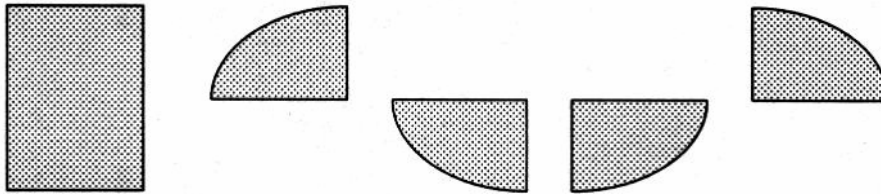


Fig. 3

**Lema 5.7.1** Formula lui Green este verificată pentru orice  $G$ -domeniu elementar.

*Demonstrație.*

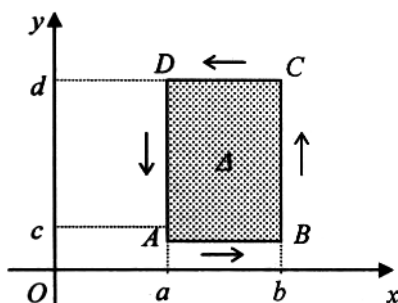


Fig. 4

Pentru început considerăm un domeniu  $\Delta$  a cărui frontieră este un dreptunghi cu laturile paralele cu axele de coordonate:

$$\Delta = \{(x, y), a < x < b, c < y < d\}.$$

Putem considera următoarele reprezentări parametrice pentru laturile dreptunghiului:

$$\overline{AB}: x = t, y = c, t \in [a, b]$$

$$\overline{BC}: x = b, y = t, t \in [c, d]$$

$$\overline{DC}: x = t, y = d, t \in [a, b]$$

$$\overline{AD}: x = a, y = t, t \in [c, d].$$

Avem:

$$\iint_{\Delta} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_c^d \left( \int_a^b \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right) dy = \int_c^d \left( Q(x, y) \Big|_a^b \right) dx = \int_c^d Q(b, y) dy - \int_c^d Q(a, y) dy \quad (2)$$

Ținând seama de modul de calcul al integralei curbilinii de speța a doua rezultă:

$$\left. \begin{aligned} \int_{\overline{AB}} Q(x, y) dy &= \int_{\overline{CD}} Q(x, y) dy = 0 \\ \int_{\overline{BC}} Q(x, y) dy &= \int_c^d Q(b, t) dt \quad \text{și} \quad \int_{\overline{AD}} Q(x, y) dy = \int_c^d Q(a, t) dt \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Din (2) și (3) deducem

$$\iint_{\Delta} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_{\overline{BC}} Q dy + \int_{\overline{CD}} Q dy + \int_{\overline{DA}} Q dy + \int_{\overline{AB}} Q dy = \int_{\text{Fr}\Delta}^{\leftarrow} Q dy \quad (4)$$

În mod analog avem

$$\begin{aligned} -\iint_{\Delta} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_a^b \left( \int_c^d \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx = -\int_a^b \left( P(x, y) \Big|_c^d \right) dx = \\ &= -\int_a^b P(x, d) dx + \int_a^b P(x, c) dx \end{aligned} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_{\overline{BC}} P dx &= \int_{\overline{AD}} P dx = 0 \\ \int_{\overline{AB}} P(x, y) dx &= \int_a^b P(t, c) dt; \quad \int_{\overline{DC}} P(x, y) dx = \int_c^d P(t, d) dt \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Din (5) și (6) deducem:

$$-\iint_{\Delta} \frac{\partial P}{\partial y} dx = \int_{AB} P dx + \int_{BC} P dx + \int_{CD} P dx + \int_{DA} P dx = \int_{\text{Fr}\Delta}^{\leftarrow} P dx \quad (7)$$

Adunând formulele (4) și (7) obținem formula lui Green.

Să considerăm acum un domeniu G-elementar ca cel din figura 5. Mai precis, un astfel de domeniu se definește astfel:

Fie  $f: [a, b] \rightarrow [c, d]$  o funcție continuă, strict crescătoare și surjectivă.

$$\Delta = \{(x, y); a < x < b; c < y < f(x)\}.$$

Avem

$$-\iint_{\Delta} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = -\int_a^b \left( \int_c^{f(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx = -\int_a^b P(x, f(x)) dx + \int_a^b P(x, c) dx \quad (8)$$

Considerând următoarele reprezentări parametriche ale arcului  $\overline{AE}$  și ale segmentelor  $\overline{AB}$  și  $\overline{BE}$ :

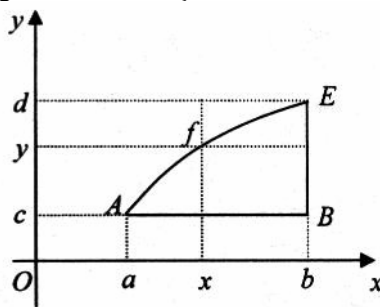


Fig. 5

$$\overline{AE}: x = t, y = f(t), t \in [a, b]$$

$$\overline{AB}: x = t, y = c, t \in [a, b]$$

$$\overline{BE}: x = b, y = t, t \in [c, d]$$

deducem

$$\left. \begin{aligned} \int_{\overline{AE}} P(x, y) dx &= \int_a^b P(t, f(t)) dt; \\ \int_{\overline{AB}} P(x, y) dt &= \int_a^b P(t, c) dt \\ \int_{\overline{BC}} P(x, y) dx &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Din (8) și (9) rezultă:

$$-\iint_{\Delta} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_{AB} P dx + \int_{BC} P dx + \int_{EA} P dx = \int_{\text{Fr}\Delta}^{\leftarrow} P dx \quad (10)$$

Pe de altă parte avem:

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy &= \int_c^d \left( \int_{f^{-1}(y)}^b \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right) dy = \int_c^d \left( Q(x, y) \Big|_{f^{-1}(y)}^b \right) dy = \\ &= \int_c^d Q(b, y) dy - \int_c^d Q[f^{-1}(y), y] dy \end{aligned} \quad (11)$$

De data aceasta, considerând pentru arcul  $\overline{AE}$  reprezentarea parametrică:

$$\overline{AE}: x = f^{-1}(t), y = t, t \in [c, d], \text{ deducem}$$

$$\int_{\overline{AE}} Q(x, y) dy = \int_c^d Q[f^{-1}(t), t] dt \quad (12)$$

Pentru segmentele  $\overline{AB}$  și  $\overline{BE}$  avem:

$$\int_{\overline{AB}} Q(x, y) dy = 0 \quad \text{și} \quad \int_{\overline{BE}} Q(x, y) dy = \int_c^d Q(b, t) dt \quad (13)$$

Din (11), (12) și (13) rezultă:

$$\iint_{\Delta} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_{\overline{AB}} Q dy + \int_{\overline{BE}} Q dy + \int_{\overline{EA}} Q dy = \int_{\overleftarrow{\text{Fr}\Delta}} Q dy \quad (14)$$

Adunând formulele (10) și (14) obținem formula lui Green pentru domeniul considerat în figura 5.

Este evident că demonstrațiile formulei lui Green pentru celelalte domenii G-elementare din figura 3 sunt absolut analoage.

**Teorema 5.7.1.** Fie  $D \subset \square^2$  un domeniu mărginit a cărui frontieră este netedă pe porțiuni și constă dintr-o reuniune finită de curbe simple închise. Presupunem în plus că domeniul  $D$  este o reuniune finită de G-domenii elementare care nu au puncte interioare comune. Dacă  $P, Q, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$  sunt continue pe  $\overline{D}$ , atunci are loc formula lui Green:

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\overleftarrow{\text{Fr}D}} P dx + Q dy .$$

*Demonstrație.*

Să presupunem că  $\overline{D} = \bigcup_{k=1}^m \overline{D}_k$  unde  $\overline{D}_k$  este un G-domeniu elementar,

$\forall k = \overline{1, m}$ . (Vezi Fig. 6).

Ținând seama de Lema 5.7.1 rezultă

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \sum_{k=1}^m \iint_{D_k} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \sum_{k=1}^m \int_{\overleftarrow{\text{Fr}D_k}} P dx + Q dy \quad (15)$$

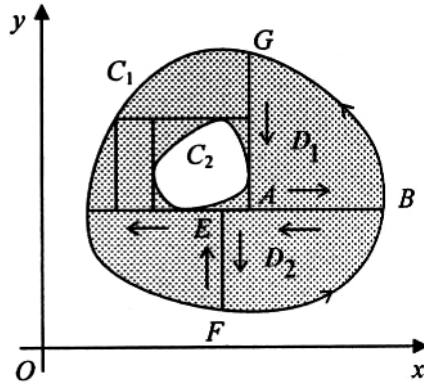


Fig. 6

Frontiera domeniului  $D$  se compune din curbele  $C_1$  și  $C_2$ . Reuniunea frontierelor domeniilor  $D_1, \dots, D_m$  se compune din curbele  $C_1$  și  $C_2$  și un număr finit de segmente de dreaptă incluse în  $D$  paralele cu axele de coordonate. Fiecare asemenea segment de dreaptă face parte din frontierele a două G-domenii elementare vecine. De exemplu  $\overline{AB}$  face parte din frontierele domeniilor  $D_1$  și  $D_2$ . Să observăm că integralele curbilinii

din membrul drept al egalității (15) calculată pe segmentele interioare dispar, deoarece orice astfel de segment este parcurs de două ori în sensuri opuse. De exemplu:

$$\int_{\text{Fr} D_1}^{\leftarrow} = \int_{\overline{AB}} + \int_{\overline{BG}} + \int_{\overline{GA}} \quad \text{și} \quad \int_{\text{Fr} D_2}^{\leftarrow} = \int_{\overline{FB}} + \int_{\overline{BA}} + \int_{\overline{AE}} + \int_{\overline{EF}}$$

Contribuția segmentului  $\overline{AB}$  în suma  $\int_{\text{Fr} D_1}^{\leftarrow} + \int_{\text{Fr} D_2}^{\leftarrow}$  este  $\int_{\overline{AB}} + \int_{\overline{BA}} = 0$ .

Așadar rezultă

$$\sum_{k=1}^m \int_{\text{Fr} D_k}^{\leftarrow} P dx + Q dy = \int_{C_1 \cup C_2 = \text{Fr} D}^{\leftarrow} P dx + Q dy \quad (16)$$

Din (15) și (16) deducem:

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\text{Fr} D}^{\leftarrow} P dx + Q dy.$$

**Teorema 5.7.2.** *Formula lui Green este valabilă pentru orice domeniu poligonal.*

*Demonstrație.* Deoarece orice domeniu poligonal este o reuniune finită de domenii triunghiulare este suficient să demonstrăm teorema pentru domenii triunghiulare. Fie  $\Delta$  un domeniu triunghiular oarecare de frontieră  $ABC$ . Ducem din



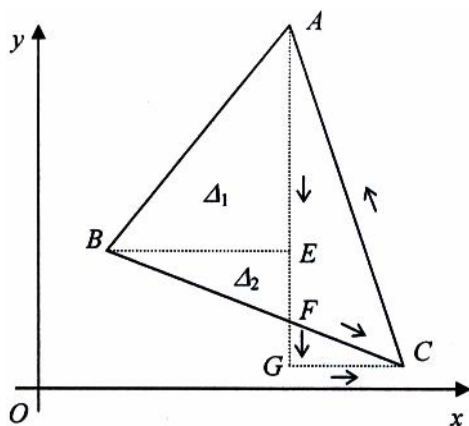


Fig. 7

$A$  o paralelă la  $Oy$ , din  $C$  o paralelă la  $Ox$  și notăm cu  $G$  intersecția lor. De asemenea, ducem prin  $B$  o paralelă la  $Ox$  și notăm cu  $E$  intersecția sa cu dreapta  $AF$ . Domeniul  $\Delta$  este reuniunea domeniilor  $\Delta_1, \Delta_2$  și  $\Delta_3$ , unde  $\Delta_1$  are frontiera  $ABE$ ,  $\Delta_2$  are frontiera  $BEF$  iar  $\Delta_3$  are frontiera  $AFC$ . Observăm că  $\Delta_1$  și  $\Delta_2$  sunt G-domenii elementare, în timp ce  $\Delta_3$  nu are această proprietate. Este clar însă, că  $\Delta_3$  se poate reprezenta ca diferența a două G-domenii elementare.

Într-adevăr, dacă notăm cu  $\Delta_4$  domeniul de frontieră  $AGC$  și cu  $\Delta_5$  domeniul de frontieră  $FGC$ , atunci  $\Delta_4$  și  $\Delta_5$  sunt G-domenii elementare și  $\Delta_3 = \Delta_4 \setminus \Delta_5$ .

Ținând seama de Lema 5.7.1 rezultă:

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta_3} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \iint_{\Delta_4} - \iint_{\Delta_5} = \int_{AG} + \int_{GC} + \int_{CA} - \left( \int_{AG} + \int_{GC} + \int_{CF} \right) = \int_{AF} + \int_{FC} + \int_{CA} \\ &= \int_{\overleftarrow{\text{Fr}\Delta_3}} P dx + Q dy . \end{aligned}$$

Așadar, formula lui Green este variabilă și pe  $\Delta_3$ , deci este variabilă pe  $\Delta$ .

**Observația 5.7.1** Se poate arăta că formula lui Green este variabilă pentru orice domeniu a cărui frontieră este o curbă simplă, închisă, netedă pe porțiuni.

Într-adevăr, se poate arăta că există un șir de linii poligonale  $C_n$ , înscrise în  $C = \text{fr}D$ , astfel încât

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_n} P dx + Q dy = \int_C P dx + Q dy .$$

Dacă notăm cu  $D_n$  domeniul mărginit care are frontiera  $C_n$ , atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy .$$

Din Teorema 5.7.2 rezultă că formula lui Green este valabilă pe  $D_n$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ . Prin trecere la limită, va rezulta că formula lui Green este valabilă și pentru domeniul  $D$ .

**Exemplul 5.7.1.** Să se calculeze  $\int_{\text{Fr}D}^{\leftarrow} (xy - y) dx + (xy + x) dy$  unde

$$D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1.$$

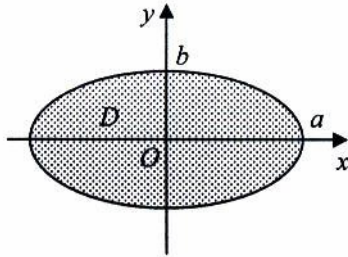


Fig. 8

Dacă notăm cu  $P(x, y) = xy - y$  și cu  $Q(x, y) = xy + x$ , atunci, din formula lui Green rezultă că

$$\begin{aligned} \int_{\text{Fr}D}^{\leftarrow} (xy - y) dx + (xy + x) dy &= \\ &= \iint_{D_n} (2 + y - x) dx dy. \end{aligned}$$

Fiind vorba de un domeniu elipsoidal vom folosi coordonate polare generalizate și anume

$$\begin{cases} x = a\rho \cos \theta \\ y = b\rho \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad \rho \in [0, 1].$$

În continuare avem

$$\begin{aligned} \iint_D (2 + y - x) dx dy &= \int_0^1 \left( \int_0^{2\pi} (2 + b\rho \sin \theta - a\rho \cos \theta) ab\rho d\theta \right) d\rho = \\ &= 2ab \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi ab. \end{aligned}$$

**Observația 5.7.2** Dacă  $D \subset \square^2$  este un domeniu care are arie și pentru care e valabilă formula lui Green, atunci  $\text{aria}(D) = \frac{1}{2} \int_{\text{Fr}D}^{\leftarrow} x dy - y dx$ .

Într-adevăr, dacă notăm cu  $P(x, y) = -\frac{y}{2}$  și cu  $Q(x, y) = \frac{x}{2}$ , atunci

$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ . Pe de altă parte știm că  $\text{aria} D = \iint_D 1 dx dy$ . Aplicând acum

formula lui Green rezultă:

$$\text{aria} D = \int_{\text{Fr}D}^{\leftarrow} P dx + Q dy = \frac{1}{2} \int_{\text{Fr}D}^{\leftarrow} x dy - y dx.$$

**Exemplul 5.7.2** să se calculeze aria domeniului elipsoidal  $D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ .

Conform Observației 5.7.2, avem:  $\text{aria}(D) = \frac{1}{2} \int_{\text{Fr}D}^{\leftarrow} x \, dy - y \, dx$ .

Fie  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  o reprezentare parametrică a elipsei  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . În continuare avem:

$$\int_{\text{Fr}D}^{\leftarrow} x \, dy - y \, dx = \int_0^{2\pi} (a \cos t \cdot b \cos t + b \sin t \cdot a \cos t) dt = 2\pi ab,$$

de unde rezultă că aria  $D = \pi ab$ .

**Observația 5.7.3** Se poate arăta că teorema 5.7.1 rămâne valabilă și într-o ipoteză mai slabă referitoare la funcțiile  $P$  și  $Q$  și anume  $P$  și  $Q$  sunt continue pe  $\bar{D}$  iar  $\frac{\partial P}{\partial y}$  și  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  sunt continue și mărginite pe  $D$ .

## 5.8. INTEGRALE DUBLE GENERALIZATE

În acest paragraf introducem noțiunea de integrală dublă generalizată, care acoperă atât cazul când domeniul este nemărginit, cât și cazul când funcția este nemărginită.

Fie  $D \subset \square^2$  un domeniu mărginit sau nu și fie  $f: D \rightarrow \mathbb{P}$ , mărginită sau nu. Vom presupune că  $f$  este integrabilă pe orice submulțime a lui  $D$  care are arie.

**Definiția 5.8.1** Spunem că  $\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$  este convergentă, dacă pentru

orice șir de domenii mărginite, care au arie,  $\{D_n\}$  cu proprietățile:

- (i)  $D_1 \subset D_2 \subset \dots \subset D_n \subset \dots$
- (ii)  $\bar{D}_n \subset D_{n+1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$
- (iii)  $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = D$

există  $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) \, dx \, dy$  e finită și nu depinde de alegerea șirului  $\{D_n\}$ .

În cazul când limita nu există, sau e infinită, spunem că  $\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$  este divergentă.

**Teorema 5.8.1.** Dacă  $f(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in D$ , atunci  $\iint_D f(x, y) dx dy$  este convergentă dacă și numai dacă există cel puțin un șir  $\{D_n\}$  de domenii mărginite, care au arie, cu proprietățile (i)-(iii), pentru care șirul  $\{a_n\}$ , unde  $a_n = \iint_{D_n} f(x, y) dx dy$ , este mărginit.

*Demonstrație. Necesitatea* este evidentă

**Suficiența.** Fie  $\{D_n\}$  un șir de domenii mărginite care au arie cu proprietățile (i)-(iii) și fie  $a_n = \iint_{D_n} f(x, y) dx dy$ . Din (i) și din faptul că  $f \geq 0$  pe  $D$ , rezultă că  $\{a_n\}$  este monoton crescător. Cum prin ipoteză  $\{a_n\}$  este mărginit, rezultă că  $\{a_n\}$  este convergent. Fie  $I = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Rămâne să arătăm că  $I = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  este independentă de alegerea șirului  $\{D_n\}$ .

Fie  $\{D'_n\}$  un alt șir de domenii mărginite care au arie, cu proprietățile (i)-(iii) și fie  $a'_n = \iint_{D'_n} f(x, y) dx dy, n \in \mathbb{N}^*$ .

Să observăm că  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  există  $m \in \mathbb{N}^*$  astfel încât

$$\bar{D}'_n \subset D_m \quad (1)$$

Într-adevăr, în caz contrar, există un punct  $M_k \in \bar{D}'_n$  astfel încât  $M_k \notin D_k, \forall k \in \mathbb{N}^*$ . Obținem astfel un șir de elemente  $\{M_k\}$  din  $\bar{D}'_n$ . Cum  $\bar{D}'_n$  este mărginită și închisă, rezultă că acest șir conține un subșir  $\{M_{k_m}\}$  convergent. Dacă notăm cu  $M = \lim_{m \rightarrow \infty} M_{k_m}$ , atunci  $M \in \bar{D}'_n \subset D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ . Fie  $n_1 \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $M \in D_{n_1}$ . Cum  $D_{n_1}$  este deschisă, deducem că există o vecinătate  $V$  a punctului  $M$  astfel încât  $V \subset D_{n_1}$ . Pe de altă parte, deoarece  $M_k \rightarrow M$ , rezultă că există un rang  $k_1 \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $M_k \in V, \forall k \geq k_1$ . În particular, rezultă că  $M_{k_1} \in V \subset D_{k_1}$ , ceea ce contrazice modul de alegere a punctelor  $M_k$ . Așadar, am demonstrat incluziunea (1). Din (1) rezultă că

$$a'_n \leq a_m \leq I \quad (2)$$

Cum  $\{a'_n\}$  este crescător, deducem că  $\{a'_n\}$  este convergent și  $I' = \lim_{n \rightarrow \infty} a'_n \leq I$ .

Inversând rolul șirurilor  $\{D_n\}$  și  $\{D'_n\}$  rezultă că  $I \leq I'$ , deci  $I = I'$ .

**Exemplul 5.8.1.** Să se studieze convergența integralei generalizate

$\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy$ , unde  $D = \square^2$ . Observăm că este o integrală generalizată în care

domeniul  $D$  este nemărginit. Deoarece  $f(x, y) = e^{-x^2-y^2} \geq 0$ ,  $\forall (x, y) \in \square^2$ , rezultă că este suficient să găsim un șir de domenii mărginite, care au arie  $\{D_n\}$ ,

pentru care șirul cu termenul general  $a_n = \iint_{D_n} f(x, y) dx dy$  este mărginit.

Alegem  $D_n = \{(x, y) \in \square^2; x^2 + y^2 < n^2\}$ ,  $n \in \square^*$ .

Este evident că  $\{D_n\}$  are proprietățile (i)-(iii). Pe de altă parte,

$$a_n = \iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^n e^{-\rho^2} \rho d\rho \right) = \pi \left( 1 - e^{-n^2} \right) \rightarrow \pi.$$

Rezultă că integrala este convergentă și  $\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy = \pi$ .

Pe de altă parte fie  $D'_n = \{(x, y) \in \square^2; |x| < n, |y| < n\}$ . Șirul  $\{D'_n\}$  este un șir de pătrate pline, care îndeplinește condițiile (i)-(iii), rezultă că

$$\begin{aligned} \pi &= \iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n \left( \int_{-n}^n e^{-x^2-y^2} dx \right) dy = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_{-n}^n e^{-x^2} dx \right) \left( \int_{-n}^n e^{-y^2} dy \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_{-n}^n e^{-x^2} dx \right)^2 = \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 \end{aligned}$$

(S-a folosit faptul că  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$  este convergentă).

Am calculat astfel integrala lui Poisson și anume  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ .

**Exemplul 5.8.2.** Să se studieze convergența integralei generalizate

$$\iint_D \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^{\alpha/2}}, \alpha > 0, \text{ unde } D = \{(x, y) \in \square^2; x^2 + y^2 < a^2\}.$$

Observăm că funcția  $f(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\alpha/2}}$  nu este definită în  $O(0,0)$  și nu

este mărginită pe  $D$ .

Fie  $D_n = D \setminus B\left(0; \frac{1}{n}\right) = \left\{ (x, y); \frac{1}{n^2} \leq x^2 + y^2 \leq a^2 \right\}$ . Este clar că  $\{D_n\}$  este

un șir de domenii mărginite, care are arie și care îndeplinește condițiile (i)-(iii), iar  $f$  este continuă pe  $D_n$ , deci integrabilă pe  $D_n$ . În continuare avem:

$$\iint_{D_n} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^{\alpha/2}} = \int_0^{2\pi} \left( \int_{1/n}^a \frac{\rho}{\rho^\alpha} d\rho \right) = \frac{2\pi}{2-\alpha} \cdot [a^{2-\alpha} - n^{\alpha-2}].$$

Observăm că dacă  $\alpha < 2$ , atunci există  $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^{\alpha/2}} = \frac{2\pi \cdot a^{2-\alpha}}{2-\alpha}$ .

Așadar, dacă  $\alpha < 2$ , integrala este convergentă și  $\iint_D \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^{\alpha/2}} = \frac{2\pi}{2-\alpha} \cdot a^{2-\alpha}$ .

Dacă  $\alpha > 2$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^{\alpha/2}} = +\infty$ .

Pentru  $\alpha = 2$ , avem  $\iint_{D_n} \frac{dx dy}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{1/n}^a \frac{d\rho}{\rho} = 2\pi \left[ \ln a - \ln \frac{1}{n} \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ .

Rezultă că  $\iint_D \frac{dx dy}{x^2 + y^2}$  este divergentă.

**Exemplul 5.8.3.** Să se studieze convergența integralei  $\iint_D \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^{\alpha/2}}$ , unde

$D = \{(x, y); x^2 + y^2 > a^2, a > 0\}$ . Evident, domeniul  $D$  este nemărginit.

Dacă notăm cu  $D_n = \{(x, y); a^2 < x^2 + y^2 < n^2\}$ , rezultă că  $\{D_n\}$  satisface condițiile (i)-(iii).

Pe de altă parte, procedând ca în exercițiul precedent deducem că

$$\iint_{D_n} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^{\alpha/2}} = \frac{2\pi}{\alpha-2} \cdot [n^{2-\alpha} - a^{2-\alpha}], \text{ dacă } \alpha \neq 2 \text{ și } \iint_{D_n} \frac{dx dy}{x^2 + y^2} = 2\pi [\ln n - \ln a].$$

Rezultă că integrala este convergentă dacă  $\alpha > 2$  și divergentă dacă  $\alpha \leq 2$ .

**Teorema 5.8.2.** Fie  $f, g: D \rightarrow \mathbb{P}_+$ , cu proprietatea  $0 \leq f(x, y) \leq g(x, y)$ ,  $\forall (x, y) \in D$ . Dacă  $\iint_D g(x, y) dx dy$  este convergentă, atunci și  $\iint_D f(x, y) dx dy$  este convergentă.

Afirmația rezultă imediat din Teorema 5.8.1 și din inegalitatea

$$a_n = \iint_{D_n} f(x, y) dx dy = \iint_{D_n} g(x, y) dx dy = b_n, \forall n.$$

**Definiția 5.8.2** Fie  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , integrabilă pe orice bilă închisă  $B_r$ , cu centrul în origine și de rază  $R$ . Dacă există  $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{B_r} f(x, y) dx dy$  și e finită, atunci, această limită se numește valoarea principală în sensul lui Cauchy a integralei generalizate  $\iint_D f(x, y) dx dy$ .

Se folosește notația:

$$V.p. \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \lim_{r \rightarrow \infty} \iint_{x^2 + y^2 \leq r^2} f(x, y) dx dy.$$

**Exemplul 5.8.4.**  $V.p. \iint_{\mathbb{R}^2} x \cdot h(x^2 + y^2) dx dy = 0$ , oricare ar fi  $h$  o funcție

continuă pe  $\mathbb{R}^2$ . Într-adevăr,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \iint_{x^2 + y^2 \leq r^2} x \cdot h(x^2 + y^2) dx dy = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \int_0^r \rho^2 \ln \rho^2 d\rho = 0.$$

## 5.9. INTEGRALE TRIPLE

După cum am văzut în acest capitol, trecerea de la integrala simplă la integrala dublă, pe lângă multe analogii, presupune și unele modificări de substanță, atât în planul conceptelor, cât și în cel al raționamentelor. Aceste modificări își au originea în principal, în teoria mulțimilor plane măsurabile (care au arie). În contrast cu această situație, trecerea de la integrala dublă la integrala triplă nu presupune nici un fel de complicație. Pentru început se impune introducerea noțiunii de volum. Din geometria elementară se știe că volumul unui paralelipiped dreptunghic este egal cu produsul lungimilor muchiilor sale. În particular, dacă  $T$  este un paralelipiped cu laturile paralele cu axele de coordonate, adică  $T = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times [c_1, c_2]$ , atunci

$$\text{Vol}(T) = (a_2 - a_1)(b_2 - b_1)(c_2 - c_1).$$

**Definiția 5.9.1** Prin mulțime elementară în spațiu înțelegem orice reuniune finită de paralelipede dreptunghice cu muchiile paralele cu axele de coordonate, fără puncte interioare comune.

Volumul unei astfel de mulțime este prin definiție suma volumelor paralelipedelor care o compun. Mai precis,  $T$  este o mulțime elementară dacă există

$T_i = [a_{i1}, a_{i2}] \times [b_{i1}, b_{i2}] \times [c_{i1}, c_{i2}]$ ,  $i = \overline{1, p}$  astfel încât  $T = \bigcup_{i=1}^p T_i$  și  $T_i \cap T_j = \emptyset$  pentru  $i \neq j$ .

$$\text{Vol}(T) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^p \text{Vol}(T_i) = \sum_{i=1}^p (a_{i2} - a_{i1})(b_{i2} - b_{i1})(c_{i2} - c_{i1}).$$

În continuare notăm cu  $\mathbf{T}$  familia tuturor mulțimilor elementare din spațiu.

**Definiția 5.9.2** Fie  $T$  un domeniu mărginit din  $\square^3$ . Se numește volumul interior al lui  $T$  următorul număr:

$$V_* = \sup \{ \text{Vol}(T'); T' \subset T, T' \in \mathbf{T} \}$$

(În cazul când nu există  $T' \in \mathbf{T}$  astfel încât  $T' \subset T$ , vom defini  $V_* = 0$ ).

În mod analog, definim volumul exterior astfel:

$$V^* = \inf \{ \text{Vol}(T''); T'' \supset T, T'' \in \mathbf{T} \}$$

Este evident că  $V_* \leq V^*$ .

Spunem că domeniul  $T$  este măsurabil (are volum) dacă  $V_* = V^* = V$ . Dacă  $T$  are volum, atunci prin definiție  $\text{Vol}(T) = V = V_* = V^*$ .

**Observația 5.9.1** Orice mulțime elementară în spațiu are volum în sensul definiției 5.9.2 și acesta coincide cu cel din Definiția 5.9.1.

**Teorema 5.9.1.** Fie  $D \subset \square^2$  un domeniu mărginit care are arie și fie  $f: \bar{D} \rightarrow \square_+$  o funcție continuă. Dacă notăm cu

$$T = \{ (x, y, z) \in \square^3; (x, y) \in \bar{D}, 0 \leq z \leq f(x, y) \}$$

atunci  $T$  are volum și  $\text{Vol}(T) = \iint_D f(x, y) dx dy$ .

*Demonstrație.*

Din punct de vedere geometric domeniul  $T$  este un corp cilindric mărginit inferior de domeniul  $D$ , lateral de suprafața cilindrică, care are generatoarele paralele cu axa  $Oz$  și curba directoare  $\text{fr}(D)$ , iar superior de graficul funcției  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in \bar{D}$ .



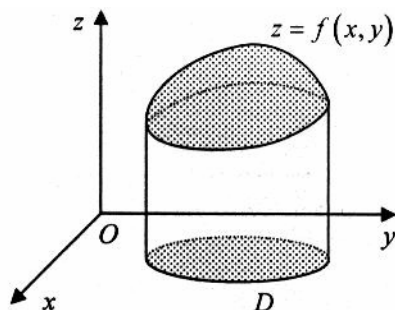


Fig. 1

funcției  $f$  pe domeniul  $D_h$  și fie  $s_k = \sum_{D_h \in I_k} m_h \text{aria } D_h$ . Ținând seama de (1) și de

faptul că  $f$  este integrabilă pe  $D$  rezultă că  $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \iint_D f(x, y) dx dy$ .

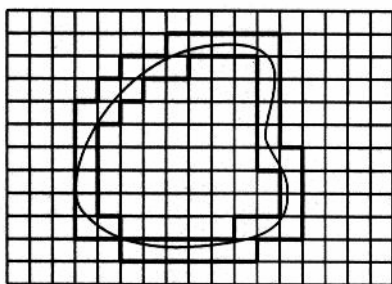


Fig. 2

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Fie  $T'_h$  paralelipipedul dreptunghic cu muchiile paralele cu axele de coordonate de bază  $\Delta_h$  și înălțime  $m_k$  și fie  $T'_k = U\{T'_h; \Delta_h \in I_k\}$ . Este evident că  $T'_k$  este o mulțime elementară în spațiu,  $T'_k \subset T$  și  $\text{Vol}(T'_k) = s_k$ .

Pe de altă parte, dacă notăm cu  $T''_h$  paralelipipedul dreptunghic de bază  $\Delta_h$  și înălțime  $M_h$  și cu  $T''_k = U\{T''_h; \Delta_h \in J_k\}$ , atunci  $T''_k$  este o mulțime elementară în spațiu,  $T''_k \supset T$  și  $\text{Vol}(T''_k) = S_k$ . În continuare avem:

$$0 \leq V^* - V_* \leq \text{Vol}(T''_k) - \text{Vol}(T'_k) = S_k - s_k.$$

Cum  $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k - s_k = 0$ , rezultă că

$$V^* = V_* = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Considerăm în planul  $xOy$  o rețea  $S_k$  de pas  $h = 2^{-k}$ , formată de dreptele  $x = ph$ ,  $y = lh$ ,  $p, l \in \mathbb{N}$ . Fie  $I_k$  familia tuturor pătratelor (pline)  $\Delta_h$  ale rețelei  $S_k$  incluse în  $D$  și fie  $P_k$  reuniunea acestor pătrate. Conform Observației 5.2.3 avem  $\text{aria } D = \sup_k \text{aria } P_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \text{aria } P_k$  (1)

Fie  $m_h$  (respectiv  $M_h$ ) marginea inferioară (respectiv superioară) a funcției  $f$  pe domeniul  $D_h$  și fie  $s_k = \sum_{D_h \in I_k} m_h \text{aria } D_h$ . Ținând seama de (1) și de

faptul că  $f$  este integrabilă pe  $D$  rezultă că  $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \iint_D f(x, y) dx dy$ .

Fie  $J_k$  familia tuturor pătratelor  $D_h$  care conțin cel puțin un punct din  $D$  și fie  $Q_k$  reuniunea acestor pătrate. Evident  $P_k \subset D \subset Q_k$ . Mai mult, se poate arăta că  $\text{aria } D = \inf_k \text{aria } Q_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \text{aria } Q_k$  (2)

Dacă notăm cu  $S_k = \sum_{D_h \in J_k} M_h \text{aria } D_h$ , (cu precizarea că dacă  $D_h \in J_k \setminus I_k$ , atunci  $M_h = \sup\{f(x, y); (x, y) \in D_h \cap D\}$ , atunci

**Observația 5.9.2** Din Teorema 5.9.1 rezultă interpretarea geometrică a integralei duble. Dacă  $f: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}_+$  este continuă, atunci  $\iint_D f(x, y) dx dy$  este

volumul corpului cilindric mărginit inferior de  $D$ , lateral de suprafața cilindrică cu generatoarele paralele cu  $Oz$  și curba directoare  $C = \text{fr}D$  și superior de suprafața  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in \bar{D}$  (Vezi fig. 1).

Demonstrația următoarei teoreme este complet analoagă cu cazul domeniilor plane.

**Teorema 5.9.2.** *Un domeniu  $T \subset \mathbb{R}^3$  are volum dacă și numai dacă pentru  $\forall \varepsilon > 0$  există două mulțimi elementare în spațiu  $P_\varepsilon$  și  $Q_\varepsilon$  astfel încât  $P_\varepsilon \subset T \subset Q_\varepsilon$  și  $\text{Vol}(Q_\varepsilon) - \text{Vol}(P_\varepsilon) < \varepsilon$ .*

**Definiția 5.9.2** *O mulțime  $A \subset \mathbb{R}^3$  este de volum zero dacă  $\forall \varepsilon > 0$ , există o mulțime elementară în spațiu  $P_\varepsilon$  cu proprietățile:  $A \subset P_\varepsilon$  și  $\text{Vol}(P_\varepsilon) < \varepsilon$ .*

Ținând seama de această definiție, Teorema 5.9.2 se poate reformula astfel:

**Teorema 5.9.3.** *Un domeniu mărginit  $T \subset \mathbb{R}^3$  are volum dacă și numai dacă frontiera sa este de arie zero.*

Fie acum  $T \subset \mathbb{R}^3$  un domeniu mărginit și fie  $\rho: T_1, T_2, \dots, T_n$  o familie de subdomenii cu proprietățile:

- 1)  $T = \bigcup_{i=1}^n T_i$
- 2)  $\overset{\circ}{T}_i \cap \overset{\circ}{T}_j = \emptyset$  dacă  $i \neq j$
- 3)  $T_i$  are volum,  $\forall i = \overline{1, n}$ .

O astfel de familie de subdomenii se numește partiție a lui  $T$ . Se numește norma partiției  $\rho$  cel mai mare diametru dintre diametrele domeniilor  $T_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Așadar  $\|\rho\| = \max\{\text{diam}(T_i), 1 \leq i \leq n\}$ , unde

$$\text{diam}(T_i) = \sup\{\text{dist}(M', M''); M', M'' \in T_i\}.$$

**Definiția 5.9.3** *Fie  $T \subset \mathbb{R}^3$  un domeniu mărginit care are volum, fie  $f: T \rightarrow \mathbb{R}$  și fie  $\rho: T_1, T_2, \dots, T_n$  o partiție oarecare a lui  $T$ . Notăm cu  $P_i$  un punct oarecare din subdomeniul  $T_i$  și cu*

$$\sigma_\rho(f, P_i) = \sum_{i=1}^n f(P_i) \text{Vol}(T_i).$$

Spunem că  $f$  este integrabilă pe domeniul  $T$  dacă există un număr finit  $I$  cu proprietatea că  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$  astfel încât oricare ar fi partiția  $\rho$  a lui  $T$  cu  $\|\rho\| < \delta_\varepsilon$  și oricare ar fi punctele  $P_i \in T_i$  avem:

$$|\sigma_\rho(f, P_i) - I| < \varepsilon.$$

Numărul  $I$  se numește integrala triplă a funcției  $f$  pe domeniul  $T$  și se folosește notația:  $I = \iiint_T f(x, y, z) dx dy dz$ . De asemenea, vom scrie

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{\|\rho\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \text{Vol}(T_i),$$

sensul exact fiind cel din Definiția 5.9.3.

Proprietățile integralei triple sunt complet analoge cu proprietățile integralei duble. În particular se poate arăta că orice funcție continuă este integrabilă.

**Definiția 5.9.4** Un domeniu  $T \subset \square^3$  se numește simplu în raport cu axa  $Oz$  dacă există un domeniu  $D \subset \square^2$  care are arie și două funcții continue  $\varphi, \psi: D \rightarrow \square$  cu proprietatea  $\varphi(x, y) < \psi(x, y), \forall (x, y) \in D$  astfel încât

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \square^3; \varphi(x, y) < z < \psi(x, y), \forall (x, y) \in D \right\}.$$

Din Teorema 5.9.1 rezultă că un astfel de domeniu are volum și

$$\text{Vol}(T) = \iint_D \psi(x, y) dx dy - \iint_D \varphi(x, y) dx dy.$$

**Teorema 5.9.4.** Fie  $T \subset \square^3$  un domeniu simplu în raport cu  $Oz$  și fie  $f: T \rightarrow \mathbb{P}$  o funcție continuă. Atunci:

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left( \int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy.$$

**Exemplul 5.9.1.** Să se calculeze volumul tetraedrului  $T$  mărginit de planele:  $x = 0, y = 0, z = 0$  și  $x + 2y + z - 6 = 0$ . Proiecția tetraedrului  $T$  în planul  $xOy$  este triunghiul (plin)  $D = \left\{ (x, y); 0 \leq x \leq 6; 0 \leq y \leq 3 - \frac{x}{2} \right\}$  iar  $T$  este următorul domeniu simplu în raport cu  $Oz$ :  $T = \left\{ (x, y, z); 0 \leq z \leq 6 - x - 2y, (x, y) \in D \right\}$ .

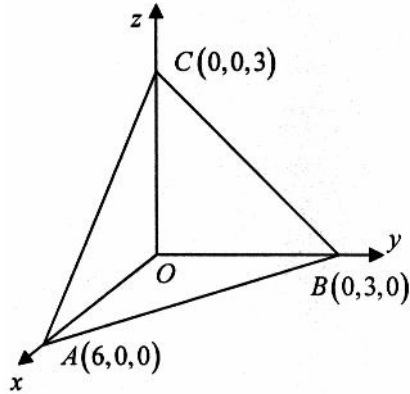


Fig. 3

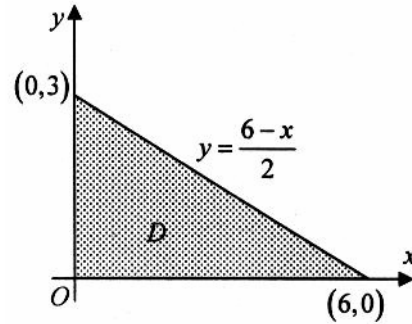


Fig. 4

Evident

$$\begin{aligned} \text{Vol}(T) &= \iiint_T dx dy dz = \iint_D \left( \int_0^{6-x-2y} dz \right) dx dy = \int_0^6 \left( \int_0^{\frac{6-x}{2}} (6-x-2y) dy \right) dx = \\ &= \int_0^6 \left( (6y - xy - y^2) \Big|_0^{\frac{6-x}{2}} \right) dx = \int_0^6 \left( 9 - 3x + \frac{x^2}{4} \right) dx = 9x - 3\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12} \Big|_0^6 = 18. \end{aligned}$$

**Exemplul 5.9.2.** Să se calculeze  $\iint_T \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$  unde  $T$  este domeniul mărginit de suprafețele  $z = 0$ ,  $z = 1$ ,  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

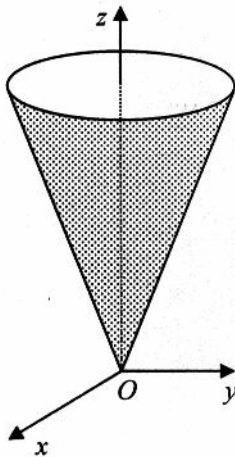


Fig. 5

Din punct de vedere geometric  $z^2 = x^2 + y^2$  reprezintă un con cu vârful în origine. Observăm că dacă notăm cu  $D$  discul  $x^2 + y^2 < 1$ , atunci

$$T = \{(x, y, z); \sqrt{x^2 + y^2} < z < 1, (x, y) \in D\}.$$

Avem

$$\begin{aligned} \iiint_T \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz &= \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \left( \int_{\sqrt{x^2 + y^2}}^1 dz \right) dx dy = \\ &= \iint_D \left( \sqrt{x^2 + y^2} - (x^2 + y^2) \right) dx dy = \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (\rho - \rho^2) \rho d\rho = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

În continuare prezentăm teorema schimbării de variabile în integrala triplă.

**Teorema 5.9.5.** Fie  $\Omega$  și  $T$  două domenii din  $\square^3$  și fie  $F: \bar{\Omega} \rightarrow \bar{T}$  o funcție vectorială surjectivă, definită prin  $F(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$ ,  $\forall (u, v, w) \in \bar{\Omega}$ .

Presupunem că  $F \in C^1(\bar{\Omega})$ ,  $F: \Omega \rightarrow T$  este bijectivă și că iacobianul  $\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \neq 0$  pe  $\Omega$ . Dacă  $f: \bar{T} \rightarrow \square$  este o funcție continuă, atunci

$$\begin{aligned} \iiint_T f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \iiint_{\Omega} f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)] \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}(u, v, w) \right| du dv dw. \end{aligned}$$

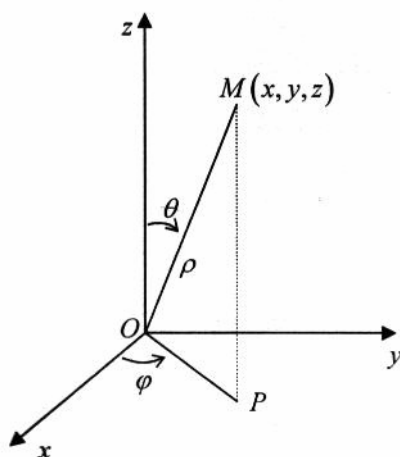


Fig. 6

Cea mai utilizată schimbare de variabile în spațiu este trecerea la coordonate polare.

$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \varphi & 0 < \rho < \infty \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi & 0 < \theta < \pi \\ z = \rho \cos \theta & 0 < \varphi < 2\pi \end{cases}$$

Semnificația notațiilor este prezentată în figura 6.

Iacobianul transformării este

$$\begin{aligned} \frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)} &= \\ &= \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \rho \cos \theta \cos \varphi & \rho \cos \theta \sin \varphi & -\rho \sin \theta \\ -\rho \sin \theta \sin \varphi & \rho \sin \theta \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \rho^2 \sin \theta. \end{aligned}$$

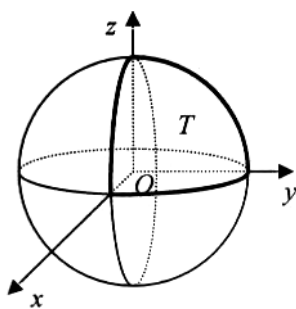


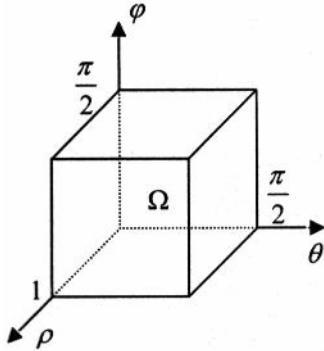
Fig. 7

**Exemplul 5.9.3.** Să se calculeze

$$\iiint_T xyz dx dy dz, \text{ unde } T \text{ este domeniul mărginit de}$$

suprafețele  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  și  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Din punct de vedere geometric, domeniul  $T$  este primul octant din sfera  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ . Trecem la coordonate polare și notăm cu

$$\Omega = \left\{ (\rho, \theta, \varphi); 0 < \rho < 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \right\}.$$



Observăm că între domeniile  $\Omega$  și  $T$  există o corespondență bijectivă. Din Teorema 5.9.5 rezultă:

$$\begin{aligned} \iiint_T xyz \, dx \, dy \, dz &= \\ &= \iiint_{\Omega} \rho^3 \sin^2 \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi \rho^2 \sin \theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi = \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta \cos \theta \, d\theta \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi \int_0^1 \rho^5 \, d\rho = \\ &= \frac{1}{48}. \end{aligned}$$

În încheierea acestui paragraf prezentăm câteva aplicații ale integralei triple în mecanică.

Fie  $T \subset \square^3$  un domeniu mărginit și fie  $\rho: \bar{T} \rightarrow \square_+$  o funcție continuă. Dacă considerăm un corp neomogen care are forma domeniului  $T$ , de densitate variabilă  $\rho = \rho(x, y, z)$ , atunci masa acestui corp este  $M = \iiint_T \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$ .

Pentru un corp omogen, care are forma domeniului  $T$ , coordonatele centrului său de greutate  $G$  se calculează cu formulele:

$$x_G = \frac{\iiint_T x \, dx \, dy \, dz}{\iiint_T dx \, dy \, dz}, \quad y_G = \frac{\iiint_T y \, dx \, dy \, dz}{\iiint_T dx \, dy \, dz}, \quad z_G = \frac{\iiint_T z \, dx \, dy \, dz}{\iiint_T dx \, dy \, dz}.$$

Pentru un corp omogen de densitate  $\rho = 1$ , momentele de inerție în raport cu originea  $O$ , în raport cu axa  $Oz$ , respectiv în raport cu planul  $xOy$  se calculează cu formulele:

$$I_O = \iiint_T (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz$$

$$I_{Oz} = \iiint_T (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$$

$$I_{xOy} = \iiint_T z^2 \, dx \, dy \, dz.$$