

Observații metodice asupra unor probleme

1. „Determinați n pentru care fracția rațională $\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n}$ este periodică simplă, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$.”

Manualul clasa a VIII-a ediția 1994 (Enunț modificat)

□ **Soluție.** După aducerea la același numitor și efectuarea calculelor obținem :

$$\frac{\frac{n^2+n}{n-1}}{n-1} + \frac{\frac{n^2-n}{n+1}}{n+1} - \frac{\frac{n^2-1}{n}}{n} = \frac{n^2+n+n^2-n-2n^2+2}{n(n+1)(n-1)} = \frac{2}{n(n+1)(n-1)}.$$

Cum $n(n+1)(n-1)$ este produs de trei numere consecutive, unul din ele se divide cu trei, deci periodicitatea este asigurată, iar pentru n divizibil cu 2 dar ne divizibil cu 4 astfel încât nici unul din cei trei factori să nu fie divizibil cu 5, de exemplu $n \in \{18; 38; 58; 78; \dots\}$ fracția este periodică simplă, în rest este periodică mixtă. În concluzie pentru orice $n = 20k \pm 2$, $k \in \mathbb{N}^*$ fracția este periodică simplă.

2. „O prăjitură sub forma unei prisme patrulater dreptă este tăiată în patru părți de-a lungul diagonalelor. Se îndepărtează o parte. Celelalte trei părți cântăresc 120 g, 200 g și 150 g. Cât cântărește partea îndepărtată?”

Manualul clasa a VIII-a ediția 1994

Soluție: Se știe că raportul unor mase ale unei substanțe este egal cu raportul volumelor corespunzătoare ($m = V \cdot \rho$), iar raportul volumelor unor prisme drepte cu înălțimile egale este egal cu raportul ariilor bazelor.

Revenind la problemă, cu notațiile din figura alăturată, unde pentru a nu supraîncărca figura am renunțat la baza inferioară, avem:

$$\frac{A_{A'O'D'}}{A_{A'O'B'}} = \frac{O'D' \cdot A'A''}{O'B' \cdot A'A''} = \frac{O'D'}{O'B'} \quad (1)$$

unde $A'A'' \perp B'D'$. Analog $\frac{A_{C'O'D'}}{A_{C'O'B'}} = \frac{O'D'}{O'B'}$ (2)

Din (1) și (2) $\frac{A_{A'O'D'}}{A_{A'O'B'}} = \frac{A_{C'O'D'}}{A_{C'O'B'}} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{x}{c}$.

I. Dacă $a = 120$, $b = 150$, $c = 200 \Rightarrow x = 160$ (g); (răspunsul din manual);

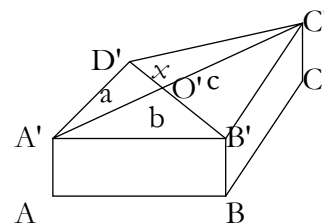
II. Dacă $a = 120$, $b = 200$, $c = 150 \Rightarrow x = 80$ (g);

III. Dacă $a = 150$, $b = 120$, $c = 200 \Rightarrow x = 250$ (g).

Celelalte variante conduc la una din cele trei soluții.

Comentarii: În enunțul problemei nu se spune care din cele 4 părți au masele enunțate. În concluzie problema admite trei soluții distincte.

Observație: Rapoartele ariilor triunghiurilor pot fi luate și în altă ordine.



3. „Ipotenuza unui triunghi dreptunghic isoscel, $(AB) \equiv (AC)$ se află într-un plan dat (P) . Proiecțiile catetelor triunghiului dat pe plan sunt egale cu jumătățile catetelor. Dacă vârful A se află la distanța de 6 cm față de planul (P) atunci aria triunghiului ABC va fi:

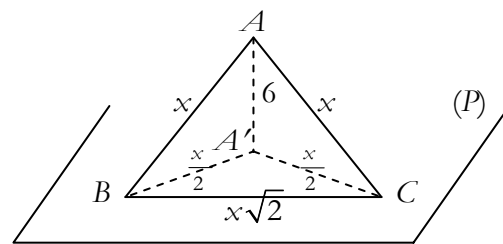
- a) 6 cm^2 ; b) 12 cm^2 ; c) 24 cm^2 ; d) 18 cm^2 ; e) alt număr. Alegeți răspunsul corect”.

Curs de metodică predării matematicii, Universitatea Pitești

Observație: După rezolvare mulți elevi ar putea găsi rezultatul c) adică 24 cm^2 . Psihologic, sunt încredințați de corectitudinea calculelor deoarece rezultatul este printre răspunsurile multiple la alegere.

Soluție: Să reluăm rezolvarea trecând prin toate secvențele:

Cu notațiile din figură avem: $A_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{x^2}{2}$



Din $\triangle AA'B$, avem $6^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = x^2 \Leftrightarrow 36 + \frac{x^2}{4} = x^2 \Leftrightarrow 144 = 3x^2 \Leftrightarrow x^2 = 48$.

Aria este $A_{ABC} = \frac{x^2}{2} = \frac{48}{2} = 24 \text{ cm}^2$ adică răspunsul c).

Este corect acest rezultat? (NUUU !!!).

Răspunsul poate surprinde. Să continuăm cu completarea punctelor de suspensie :

Cât este măsura unghiului format de fiecare catetă cu proiecția ei ? (60°).

Comparați acest unghi cu unghiul format de fiecare catetă cu ipotenuza (45°).

Este folosită corect teorema care arată că unghiul format de o dreaptă cu un plan este mai mic decât unghiul format de acea dreaptă cu orice altă dreaptă a planului? (Nu !).

Ce se poate observa relativ la inegalitatea laturilor din triunghiul $A'BC$? ($BC > BA' + A'C$).

Este posibilă poziția triunghiului față de plan în condițiile date ? (Nu !).

Concluzie

Trebuie arătat elevilor că dacă se făcea analiza problemei înainte de a o rezolva, nu se ajungea la această absurditate.