

Examenul de bacalaureat național 2014

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră numărul complex $z = 2 + 3i$. Calculați z^2 .
- 5p** 2. Determinați coordonatele punctului de intersecție cu axa Ox a graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 9$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_9(x^2 + 5) = 1$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 13.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$ și $C(0, 3)$. Calculați aria triunghiului ABC .
- 5p** 6. Se consideră $E(x) = \cos x + \sin \frac{x}{2}$, unde x este număr real. Calculați $E\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2a+1 & 1 \\ 1-a & 2 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Calculați $\det(A(1))$.
- 5p** b) Determinați numărul real a știind că $\det(A(a)) = 1$.
- 5p** c) Determinați inversa matricei $A(0)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = 2xy - 3x - 3y + 6$.
- 5p** a) Calculați $1 \circ 2$.
- 5p** b) Arătați că $x \circ y = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(y - \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2}$ pentru orice numere reale x și y .
- 5p** c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x \circ x = 2$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (-\infty, 2) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^{-x}}{x-2}$.
- 5p** a) Calculați $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.
- 5p** b) Arătați că $f'(x) = \frac{(1-x)e^{-x}}{(x-2)^2}$, $x \in (-\infty, 2)$.
- 5p** c) Arătați că $f(x) \leq -\frac{1}{e}$ pentru orice $x \in (-\infty, 2)$.
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x+1}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_1^2 (x+1)f(x) dx = 2 \ln 2 - 1$.
- 5p** b) Arătați că $\int_1^e (f(x) + (x+1)f'(x)) dx = 1$.
- 5p** c) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g: [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{\ln x}{f(x)}$.

Examenul de bacalaureat național 2014

Proba E. c)

Matematică M_{st-nat}

Barem de evaluare și de notare

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$z^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3i + (3i)^2 =$ $= -5 + 12i$	3p 2p
2.	$f(x) = 0 \Rightarrow (x-3)^2 = 0$ $x = 3$ și $y = 0$	3p 2p
3.	$x^2 + 5 = 9 \Rightarrow x^2 - 4 = 0$ $x_1 = -2$ și $x_2 = 2$, care verifică ecuația	3p 2p
4.	Sunt 7 numere de două cifre divizibile cu 13, deci sunt 7 cazuri favorabile Sunt 90 de numere de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{7}{90}$	2p 1p 2p
5.	$AB = 4$, $CO = 3$ și CO este înălțime $\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$	3p 2p
6.	$E\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{4} =$ $= 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det(A(1)) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 0 =$ $= 6$	3p 2p
b)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 2a+1 & 1 \\ 1-a & 2 \end{vmatrix} = 5a+1$ $5a+1=1 \Rightarrow a=0$	3p 2p
c)	$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\det(A(0)) = 1$ $(A(0))^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	2p 3p
2.a)	$1 \circ 2 = 2 \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 6 =$ $= 1$	3p 2p
b)	$x \circ y = 2 \left(xy - \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}y + \frac{9}{4} + \frac{3}{4} \right) =$ $= 2 \left(x \left(y - \frac{3}{2} \right) - \frac{3}{2} \left(y - \frac{3}{2} \right) \right) + \frac{3}{2} = 2 \left(x - \frac{3}{2} \right) \left(y - \frac{3}{2} \right) + \frac{3}{2}$ pentru orice numere reale x și y	2p 3p

c)	$2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} = 2 \Rightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$	3p
	$x_1 = 1$ și $x_2 = 2$	2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{-x}}{x-2} = \frac{e^{-1}}{1-2} =$	3p
	$= -\frac{1}{e}$	2p
b)	$f'(x) = \frac{(e^{-x})' \cdot (x-2) - e^{-x} \cdot (x-2)'}{(x-2)^2} = \frac{-e^{-x} \cdot (x-2) - e^{-x}}{(x-2)^2}$	3p
	$= \frac{-e^{-x} \cdot (x-1)}{(x-2)^2} = \frac{(1-x)e^{-x}}{(x-2)^2}, x \in (-\infty, 2)$	2p
c)	$f'(1) = 0, f'(x) > 0$ pentru orice $x \in (-\infty, 1)$ și $f'(x) < 0$ pentru orice $x \in (1, 2)$	3p
	$f(x) \leq f(1) \Rightarrow f(x) \leq -\frac{1}{e}$ pentru orice $x \in (-\infty, 2)$	2p
2.a)	$\int_1^2 (x+1) f(x) dx = \int_1^2 \ln x dx = x \ln x \Big _1^2 - \int_1^2 1 dx =$	3p
	$= 2 \ln 2 - x \Big _1^2 = 2 \ln 2 - 1$	2p
b)	$\int_1^e (f(x) + (x+1) \cdot f'(x)) dx = \int_1^e ((x+1) \cdot f(x))' dx =$	3p
	$= (x+1) f(x) \Big _1^e = \ln e = 1$	2p
c)	$V = \pi \cdot \int_2^3 g^2(x) dx = \pi \cdot \int_2^3 (x+1)^2 dx =$	2p
	$= \pi \cdot \frac{(x+1)^3}{3} \Big _2^3 = \frac{37\pi}{3}$	3p