



Concursul de matematică „Leon Birnbaum”
Ediția a IV-a 23 mai 2014

Clasa a IV-a

1. Șapte numere consecutive, scrise în ordine crescătoare, au suma 252.
Care este numărul scris în mijloc?

Olimpiada Bangladesh, 2009

2. Trei numere au suma 975. Dacă din fiecare se scade un număr a , se obțin respectiv rezultatele 12, 345, 126. Aflați cele trei numere.

Manual de matematică pentru clasa a IV-a, 1981

3. Un caiet, trei creioane și șapte rigle costă 169 lei, iar patru caiete, trei creioane și o riglă costă 91 lei.

Cât costă împreună un caiet, un creion și o riglă ?

prof. Vasile Albu, Dej, R.M.T. nr.2 /1984

Timp de lucru: 75 minute

Succes!



Concursul de matematică „Leon Birnbaum”
Ediția a IV-a 23 mai 2014

Clasa a V-a

1. Șapte nasturi și stofa pentru o rochie au costat în total 168 lei. Prețul nasturilor reprezintă $\frac{1}{7}$ din prețul stofei.

Cât costă un nasture?

Manual de matematică pentru clasa a IV-a, 1983

2. Prețul a trei stilouri este egal cu prețul a cinci creioane. O carte costă cât un stilou și un creion la un loc.

Câte cărți pot fi cumpărate cu prețul total a nouă creioane și al unui stilou ?

prof. Vasile Albu, Dej, Gazeta Matematică nr. 2 / 2002

3. Aflați cel mai mic număr natural care începe cu cifra 2, știind că mutând această cifră la sfârșit se obține un număr de 3 ori mai mare decât numărul inițial.

Olimpiada Bangladesh, 2007

Timp de lucru: 75 minute

Succes!



Concursul de matematică „Leon Birnbaum”
Ediția a IV-a 23 mai 2014

Clasa a VI-a

1. Numerele naturale a , $3a$ și $6a$ au proprietatea că produsul lor P este divizibil cu suma lor S .

Arătați ca numărul natural $\frac{P}{S}$ este divizibil cu 45.

Manual de matematică clasa a V-a, 1983, enunț parțial

2. În triunghiul ABC dreptunghic în A ducem bisectoarea CE , $E \in AB$, înălțimea AF , $F \in BC$ și $EM \perp BC$, $M \in BC$. Notăm N intersecția dreptelor CE și AF .
Arătați că $MN \parallel AB$.

prof. Vasile Albu, Dej, R.M.T. 1-2 / 1989

3. Jumătate dintr-un teren a fost împărțit între trei frați, o treime din teren s-a împărțit între două surori, iar mama a primit trei sferturi din restul terenului. Ceea ce a rămas a fost donat pentru construcția unei școli, valoarea terenului donat fiind 70.000 taka*.

Aflați care a fost valoarea întregului teren.

* „taka” este moneda națională din Bangladesh

Olimpiada Bangladesh
2008

Timp de lucru: 75 minute

Succes!



Concursul de matematică „Leon Birnbaum”
Ediția a IV-a 23 mai 2014

Clasa a VII-a

1. Rezolvați ecuația cu necunoscuta x :

$$\frac{a-b}{x+1} - \frac{a+b}{x-1} = 0$$

Manual de matematică clasa a VII-a 1980

2. Stabiliți dacă există numerele $a, b \in \mathbf{N}^*$ astfel încât:

$$2003a + 2004b = 2003 \cdot 2004$$

prof. Giurgiu Gheorghe, Dej, R.M.T. nr.3 / 2004

3. Trapezul ABDC are bazele $CD=9$ m și $AB=3$ m. Înălțimea are lungimea 4 m, iar $AD \perp CD$.

Calculați aria triunghiului AEC, unde E este intersecția dreptelor AD și BC.

Olimpiada Bangladesh 2010, enunț adaptat

Timp de lucru: 75 minute

Succes!



Concursul de matematică „Leon Birnbaum”

Ediția a IV-a 23 mai 2014

Clasa a VIII-a

1. Aflați suma primilor 140 de termeni ai sumei:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \dots$$

Olimpiada Bangladesh 2007

2. Trapezul ABCD cu bazele [AB] și [CD] nu este isoscel.

Demonstrați egalitatea:

$$\frac{AC^2 - BD^2}{AD^2 - BC^2} = \frac{AB + CD}{AB - CD}$$

prof. Dorin Andrica, Dej, R.M.T. nr. 1-2 / 1980

3. Intr-un tetraedru regulat SABC, cu muchia de lungime a , se consideră punctele $P \in [SC]$ și $Q \in [SB]$, astfel încât $SP=2 \cdot PC$ și $SQ=2 \cdot QB$.

Calculați aria triunghiului APQ.

Manual de matematică clasa a VIII-a, 1981

Timp de lucru: 75 minute

Succes!

Concursul de matematică „Leon Binbaum”

23 mai 2014

Soluții și barem de corectare clasa a IV-a

1. Fie $a, a+1, a+2, a+3, a+4, a+5, a+6$ cele șapte numere 2p
 $a+(a+1)+(a+2)+(a+3)+(a+4)+(a+5)+(a+6)=252$ 3p
 $7a+21=252$ 2p
 $a=33$ 2p
Numărul din mijloc este 36 1p
2. Cele trei numere pot fi scrise $a+12, a+345, a+126$ 2p
Se scrie egalitatea $(a+12)+(a+345)+(a+126)=975$ 2p
Se obține $3a+483=975$ 2p
 $a=164$ 2p
Numerele inițiale sunt 176, 509, 290 2p
3. Fie a, b, c respectiv prețul unui caiet, al unui creion și al unei rigle 1p
 $a + 3b + 7c = 169$ 2p
 $4a + 3b + c = 91$ 2p
Dublând a doua egalitate se obține $8a + 6b + 2c = 182$ 2p
Adunând această egalitate cu prima se obține $9a + 9b + 9c = 351$ 2p
Împărțind această egalitate la 9 se obține $a + b + c = 39$ 1p

Notă: Oricare altă soluție corectă se punctează corespunzător.

23 mai 2014

Soluții și barem de corectare clasa a V-a

1. Fie x prețul nasturilor 1p
Prețul stofei este $7x$ 2p
 $7x+x=168$ 3p
 $x=21$ 3p
Prețul unui nasture este $21:7=3$ lei 1p
2. Fie a, b, c prețul respectiv al unui stilou, al unui creion și al unei cărți 1p
 $3a = 5b$ 2p
 $c = a + b$ 2p
 $a + 9b = a + b + 8b =$ 2p
 $= c + 8b = c + 5b + 3b =$ 1p
 $= c + 3a + 3b = c + 3c = 4c$ 2p
3. Fie x numărul format din cifrele situate după 2 la numărul inițial 1p
Numărul inițial are forma $2000\dots 0+x$ 1p
Mutând cifra 2 la sfârșit este $10x+2$ 1p
Se scrie ecuația $10x+2=3 \cdot (2000\dots 0+x)$ 2p
Se obține $7x=6000\dots 0-2$ 2p
Cea mai mică soluție este pentru cazul $7x=599998$ 1p
 $x=85714$ 1p
Numărul inițial este 285714 1p

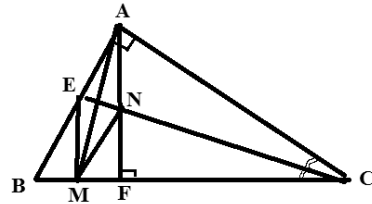
Notă: Oricare altă soluție corectă se punctează corespunzător.

23 mai 2014

Soluții și barem de corectare clasa a VI-a

1. Fie $S = a + 3a + 6a = 10a$ 2p
 $P = a \cdot 3a \cdot 6a = 18a^3$ 2p
Deoarece P se divide cu S, se poate scrie $18a^3 = k \cdot 10a$ 1p
Se obține $9a^2 = 5k$ 1p
Numărul k este divizibil cu 9 (*) 1p
Numărul a este divizibil cu 5, deci 1p
 a^2 se divide cu 25, deci k se divide cu 5 (***) 1p
Din (*) și (***) se obține că k este divizibil cu 45 1p

2. Figura 2p
 $\Delta CEA \equiv \Delta CEM$ (cazul I.U.) 2p
 ΔCAM este isoscel cu vârful C 1p
CE fiind bisectoare, rezultă $CE \perp AM$ 2p
N este ortocentru în ΔACM , deci $MN \perp AC$ 2p
Deoarece și $BA \perp AC$, se obține $MN \parallel AB$ 1p



3. Notăm x valoarea întregului teren 1p
Frații au primit $\frac{x}{2}$ 1p
Surorile au primit $\frac{x}{3}$ 1p
Mama a primit $\frac{3}{4} \cdot (x - \frac{x}{2} - \frac{x}{3}) =$ 2p
 $= \frac{3}{4} \cdot \frac{6x - 3x - 2x}{6} = \frac{3}{4} \cdot \frac{x}{6} = \frac{x}{8}$ 2p
Partea donată este $x - \frac{x}{2} - \frac{x}{3} - \frac{x}{8} = \frac{x}{24}$ 2p
Deoarece $\frac{x}{24} = 70.000$, $x = 1.680.000$ taka 1p

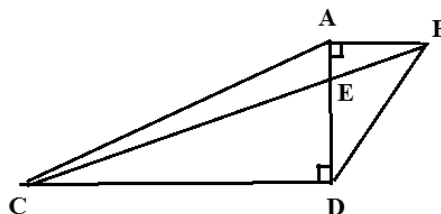
Notă: Oricare altă soluție corectă se punctează corespunzător.

Soluții și barem de corectare clasa a VII-a

1. $\frac{a-b}{x+1} = \frac{a+b}{x-1}$ 2p
 $ax - bx - a + b = ax + bx + a + b$ 3p
 $-2bx = 2a$ 3p
 $x = -\frac{a}{b}$ 2p

2. Deoarece 2003a și membrul drept se divid cu 2003, se obține că b se divide cu 2003 2p
 $b=2003k$
 Înlocuind se obține $2003a + 2003 \cdot 2004k = 2003 \cdot 2004$ 2p
 Împărțind egalitatea cu 2003 se obține $a + 2004k = 2004$ 1p
 Singurele posibilități sunt
 a) $a=0, k=1$, ceea ce nu convine 2p
 b) $a=2004, k=0$, ceea ce conduce la $b=0$, deci nu convine 2p
 În consecință, nu există o astfel de pereche a, b. 1p

3. Figura 2p
 Triunghiurile BAE și CDE sunt asemenea (U.U.) 1p
 Notăm $AE=x$ 1p
 $\frac{x}{4-x} = \frac{3}{9}$ 2p
 $x=1$ 2p
 $\frac{AE \cdot CD}{2} =$ 1p
 $\frac{1 \cdot 9}{2} = 4,5 m^2$ 1p

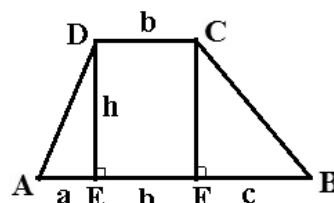


Notă: Oricare altă soluție corectă se punctează corespunzător.

24 mai 2013

Soluții și barem de corectare clasa a VIII-a

1. $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \dots + 139^2 - 140^2 =$ 1p
 $(1-2)(1+2) + (3-4)(3+4) + (5-6)(5+6) + \dots + (139-140)(139+140) =$ 2p
 $-1 \cdot 3 - 1 \cdot 7 - 1 \cdot 11 - \dots - 1 \cdot 279 =$ 2p
 $-(3+7+11+\dots+279) =$ 2p
 $-(4 \cdot 1 - 1 + 4 \cdot 2 - 1 + 4 \cdot 3 - 1 + \dots + 4 \cdot 70 - 1) =$ 1p
 $-(4 \cdot \frac{70 \cdot 71}{2} - 70) = -9870$ 2p



2. Ducem înălțimile CF și DE 1p
 Notăm AE=a, EF=CD=b, FB=c, DE=CF=h 1p
 Trebuie arătat că $\frac{AC^2 - BD^2}{AD^2 - BC^2} = \frac{a+b+c+b}{a+b+c-b} = \frac{a+2b+c}{a+c}$ 1p

$AC^2 = (a+b)^2 + h^2$ 0,5p
 $BD^2 = (b+c)^2 + h^2$ 0,5p
 $AD^2 = a^2 + h^2$ 0,5p
 $BC^2 = c^2 + h^2$ 0,5p

$\frac{AC^2 - BD^2}{AD^2 - BC^2} = \frac{(a+b)^2 + h^2 - [(b+c)^2 + h^2]}{(a+h)^2 - (c+h)^2} =$ 1p
 $= \frac{a^2 + 2ab + b^2 + h^2 - b^2 - 2bc - c^2 - h^2}{a^2 + 2ah + h^2 - c^2 - 2ch - h^2} =$ 1p
 $= \frac{a^2 + 2ab - 2bc - c^2}{a^2 - c^2} = \frac{(a-c)(a+c) + 2b(a-c)}{(a-c)(a+c)} =$ 2p
 $= \frac{(a-c)(a+c+2b)}{(a-c)(a+c)} = \frac{a+2b+c}{a+c}$ 1p

3. Figura

$\frac{SP}{PC} = \frac{SQ}{QB} = 2$ 1p

Diin reciproca teoremei lui Thales se obține că PQ||BC 1p
 Deoarece $\Delta SPQ \sim \Delta SCB$, $\frac{PQ}{a} = \frac{2}{3}$, $PQ = \frac{2a}{3}$ 1p

Calculăm AQ. Ducem înălțimea AM în ΔASB 0,5p

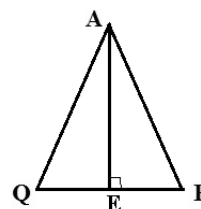
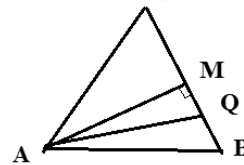
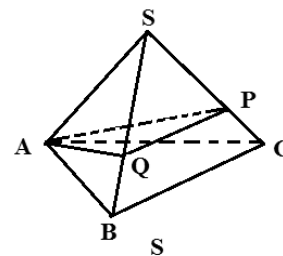
$AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ 0,5p
 $BQ = \frac{a}{3}$ 0,5p
 $MQ = \frac{a}{2} - \frac{a}{3} = \frac{a}{6}$ 1p

$AQ = \sqrt{(\frac{a\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{a}{6})^2} = \frac{a\sqrt{7}}{3}$ 1p

Ducem înălțimea AE în ΔAQP isoscel; $PE = \frac{a}{3}$ 0,5p

$AE = \sqrt{(\frac{a\sqrt{7}}{3})^2 - (\frac{a}{3})^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ 1p

Aria ΔAPQ este $\frac{PQ \cdot AE}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^2\sqrt{6}}{9}$ 1p



Notă: Oricare altă soluție corectă se punctează corespunzător.