CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ "SEVER AUREL GROZE"

Ediția a II-a, BECLEAN, 16-18 mai 2014

SUBIECTE CLASA a VIII-a

1. Aflați numerele reale x,y care verifică relația:

$$|(2x - y)^2 - 3x - 2y + 7| + (7 - 3x - 2y)^2 + 3x + 2y = 7.$$

2. Arătați că, dacă a,b,c > 0, atunci

$$\frac{a^2 - c^2}{b + c} + \frac{b^2 - a^2}{c + a} + \frac{c^2 - b^2}{a + b} \geq 0.$$

G.M. 1/2014

3. Fie M un punct aflat în interiorul triunghiului echilateral ABC.
   Dreapta VM este perpendiculară pe planul (ABC), iar din punctul M ducem $MA' \perp VA, MB' \perp VB, MC' \perp VC$, unde $A' \in (VA), B' \in (VB), C' \in (VC)$.
   Să se demonstreze că [VA], [VB] și [VC] sunt laturile unui triunghi asemenea cu $\Delta A'B'C'$.

NOTĂ: *Toate subiectele sunt obligatorii*

Fiecare subiect se notează cu 0- 7 puncte

Nu se acordă puncte din oficiu

Timp efectiv de lucru 2 ore

Succes !

Subiecte si barem

- Clasa a VIII-a -

1. Aflati numerele reale x,y care verifica relatia:
$|(2x-y)^2-3x-2y+7|+(7-3x-2y)^2+3x+2y=7.$

Solutie :

$|(2x-y)^2-(3x+2y-7)|+(3x+2y-7)^2=-(3x+2y-7) \Rightarrow 3x+2y-7\leq 0$ 1p

- ⇨ $(2x-y)^2-(3x+2y-7)\geq 0 \Rightarrow$
- ⇨ ecuatia devine $(2x-y)^2-(3x+2y-7)+(3x+2y-7)^2=-(3x+2y-7)$ 2p
- ⇨ $(2x-y)^2+(3x+2y-7)^2=0 \Rightarrow 2x-y=0$ si $3x+2y-7=0$ 2p

sistem care admite solutiile x=1, y=2. 2p

2. Aratati ca, daca a,b,c>0, atunci

$$\frac{a^2-c^2}{b+c}+\frac{b^2-a^2}{c+a}+\frac{c^2-b^2}{a+b}\geq 0.$$

G.M. 1/2014

Solutie:

$$\frac{a^2-c^2}{b+c}+\frac{b^2-a^2}{c+a}+\frac{c^2-b^2}{a+b}=$$

$$\frac{a^2-b^2}{b+c}+\frac{b^2-c^2}{b+c}+\frac{b^2-c^2}{c+a}+\frac{c^2-a^2}{c+a}+\frac{c^2-a^2}{a+b}+\frac{a^2-b^2}{a+b}=$$

$$\frac{a^2-b^2}{b+c}+b-c+\frac{b^2-c^2}{c+a}+c-a+\frac{c^2-a^2}{a+b}+a-b=\frac{a^2-b^2}{b+c}+\frac{b^2-c^2}{c+a}+\frac{c^2-a^2}{a+b}$$ 3p

$$2\left(\frac{a^2-c^2}{b+c}+\frac{b^2-a^2}{c+a}+\frac{c^2-b^2}{a+b}\right)=\frac{a^2-c^2}{b+c}+\frac{b^2-a^2}{c+a}+\frac{c^2-b^2}{a+b}+\frac{a^2-b^2}{b+c}+\frac{b^2-c^2}{c+a}+\frac{c^2-a^2}{a+b}=$$

$$(a^2-b^2)\left(\frac{1}{b+c}-\frac{1}{a+c}\right)+(b^2-c^2)\left(\frac{1}{c+a}-\frac{1}{a+b}\right)+(c^2-a^2)\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{b+c}\right)=$$ 3p

$$\frac{(a-b)^2(a+b)}{(a+c)(b+c)}+\frac{(b-c)^2(b+c)}{(c+a)(a+b)}+\frac{(c-a)^2(c+a)}{(a+b)(b+c)}\geq 0 \text{ (A)}$$ 1p

3. Fie M un punct aflat in interiorul triunghiului echilateral ABC. Dreapta VM este perpendicular pe planul (ABC), iar din punctul M ducem $MA' \perp VA, MB' \perp VB, MC' \perp VC$, unde $A' \in (VA), B' \in (VB), C' \in (VC)$.

Sa se demonstreze ca [VA], [VB] si [VC] sunt laturile unui triunghi asemenea cu $\Delta A'B'C'$.

Solutie:

Notam AB=l.

$VA' \cdot VA = VB' \cdot VB = VC' \cdot VC = VM^2 \Rightarrow \Delta VA'B' \sim \Delta VBA \Rightarrow \frac{VA'}{A'B'} = \frac{VB}{AB} \Rightarrow A'B' = \frac{VA' \cdot l}{VB}$ 3p

$\Delta VA'C' \sim \Delta VCA \Rightarrow \frac{VA'}{A'C'} = \frac{VC}{AC} \Rightarrow VA' = \frac{VC \cdot A'C'}{l} \Rightarrow A'B' = \frac{VC \cdot A'C' \cdot l}{VB \cdot l} = \frac{VC \cdot A'C'}{VB}$ 2p

⇨ $\frac{A'B'}{VC} = \frac{A'C'}{VB}$ si analog

⇨ $\frac{A'C'}{VB} = \frac{B'C'}{VA} \Rightarrow \Delta A'B'C'$ este asemenea cu triunghiul de laturi VC,VA, respectiv VB. 2p