CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ "SEVER AUREL GROZE"

Ediția a II-a, BECLEAN, 16-18 mai 2014

SUBIECTE CLASA a VII-a

1. Să se demonstreze că:

$$\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ac}+\frac{c^2}{c^2+2ab}\ge 1.$$

2. Determinați perechile de numere întregi (a,b) cu proprietatea că:

$$(a^2-b^2)^2=1+12b.$$

G.M. 3/2014

3. În exteriorul ΔABC, ascuțitunghic, se consideră paralelogramele $ABMM', BCNN', CAPP'$, astfel încât $M\in(CB, N\in(AC, P\in(BA$.

   ştiind că $MB=\sqrt{ac}, CN=\sqrt{ab}, AP=\sqrt{bc}$, unde a,b,c sunt lungimile laturilor ΔABC, sa se demonstreze că:

   a) Dreptele AN', BP', CM' sunt concurente;

   b) Dacă dreptele AN', BP', CM' sunt concurente în centrul cercului înscris în ΔABC, atunci ΔABC este echilateral.

NOTĂ: *Toate subiectele sunt obligatorii*

Fiecare subiect se notează cu 0- 7 puncte

Nu se acordă puncte din oficiu

Timp efectiv de lucru 2 ore

Succes !

Subiecte si barem

- Clasa a VII-a -

4. Sa se demonstreze ca:
$$\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ac}+\frac{c^2}{c^2+2ab}\geq 1.$$

Solutie :

$2bc \leq b^2+c^2 \Rightarrow \dfrac{a^2}{a^2+2bc} \geq \dfrac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$ si analog 4p

$\Rightarrow \dfrac{a^2}{a^2+2bc}+\dfrac{b^2}{b^2+2ac}+\dfrac{c^2}{c^2+2ab} \geq \dfrac{a^2}{a^2+b^2+c^2}+\dfrac{b^2}{a^2+b^2+c^2}+\dfrac{c^2}{a^2+b^2+c^2}=1$ 3p

5. Determinati perechile de numere intregi (a,b) cu proprietatea ca:
$(a^2-b^2)^2=1+12b$.

G.M. 3/2014

Solutie:

$1+12b=k^2 \Rightarrow b=\dfrac{k^2-1}{12}$; $k\neq 0$ 1p

I. $a^2-b^2=k \Rightarrow a^2=(\dfrac{k^2-1}{12})^2+k=x \Rightarrow x$ – patrat perfect

Daca $(\dfrac{k^2-1}{12})^2<(\dfrac{k^2-1}{12})^2+k<(\dfrac{k^2-1}{12}+1)^2 \Rightarrow x$ nu e p.p.

inegalitatea din dreapta $\Leftrightarrow k<\dfrac{k^2-1}{6}+1 \Leftrightarrow k(6-k)<5 \Leftrightarrow k\leq 0$ sau $k\geq 6$ ceea ce nu convine

$\Rightarrow k\in\{1,2,3,4,5\}$; convine $k=5 \Rightarrow b=2,\ a=\pm 3$; $k=1 \Rightarrow b=0,\ a=\pm 1$ 3p

II. $a^2-b^2=-k \Rightarrow a^2=b^2-k=y \Rightarrow y$ – p.p.

Daca $(\dfrac{k^2-1}{12}-1)^2<(\dfrac{k^2-1}{12})^2-k<(\dfrac{k^2-1}{12})^2 \Rightarrow y$ nu e p.p.

Inegalitatea din stanga $\Leftrightarrow k<\dfrac{k^2-1}{6}-1 \Leftrightarrow 7<k(k-6) \Leftrightarrow k\leq 0$ sau $k\geq 8$ ceea ce nu convine

$\Rightarrow k\in\{1,2,3,4,5,6,7\}$; convine $k=7 \Rightarrow b=4, a=\pm 3$ 3p

6. In exteriorul ΔABC, ascutitunghic, se considera paralelogramele $ABMM', BCNN', CAPP'$, astfel incat $M\in(CB, N\in(AC, P\in(BA$.

Stiind ca $MB=\sqrt{ac}, CN=\sqrt{ab}, AP=\sqrt{bc}$, unde a,b,c sunt lungimile laturilor ΔABC, sa se demonstreze ca:

c) Dreptele AN', BP', CM' sunt concurente;

d) Daca dreptele AN', BP', CM' sunt concurente in centrul cercului inscris in ΔABC, atunci ΔABC este echilateral.

Solutie:

a) Notam AN'∩BC={A'}; BP'∩AC={B'} si CM'∩AB={C'}

$\frac{BA'}{A'C}=\frac{BN'}{AC}=\frac{\sqrt{ab}}{b};\frac{CB'}{B'A}=\frac{CP'}{AB}=\frac{\sqrt{bc}}{c};\frac{AC'}{C'B}=\frac{AM'}{BC}=\frac{\sqrt{ac}}{a}$=> 2p

$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1\Rightarrow$ AN', BP', CM' concurente (Ceva) 2p

b) Daca AA'∩BB'∩CC'={I} => <BAA'≡<A'AC => <BAA'≡<BN'A

⇨ $c=\sqrt{ab}$ => c^2=ab. Analog a^2=bc si b^2=ac 2p

⇨ a= $a=\frac{c^2}{b}\Rightarrow b^2=\frac{c^2}{b}\cdot c\Rightarrow c^3=b^3\Rightarrow c=b\Rightarrow a=b=c\Rightarrow \Delta ABC$ echilateral 1p