

**MODEL PENTRU PREGĂTIREA PROBEI DE MATEMATICĂ DIN CADRUL
EXAMENULUI DE BACALAUREAT 2014****SUBIECT**

M_{mate-info} pentru filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică și pentru filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică;

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

- 5p 1. Determinați $m \in \mathbb{R}$ dacă $2m, m+3, 5m+1$ sunt în progresie aritmetică.
- 5p 2. Calculați $\log_2 \sqrt[3]{\frac{1}{8}} + \frac{1}{2}[-1, 3]$, unde notația $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x .
- 5p 3. Determinați valoarea maximă a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 - 3x + 8$.
- 5p 4. Determinați câte numere naturale de patru cifre distincte se pot scrie în baza 10.
- 5p 5. Dacă $\operatorname{tg} x = 2$, calculați $\sin 2x$.
- 5p 6. Fie $A(5, 2)$, $B(0, 3)$ și $C \in Ox$. Determinați coordonatele punctului C dacă $CA \perp CB$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Fie $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in S_5$ și $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in S_5$.
- 5p a) Rezolvați ecuația $\sigma x = \tau$, în S_5 .
- 5p b) Determinați numărul de elemente ale mulțimii $G = \{ \sigma^k / k \in \mathbb{N}^* \}$.
- 5p c) Rezolvați ecuația $x^4 = \sigma$.
2. Fie $f = X^{21} + 4X^2 + 3X + 3 \in \mathbb{Z}_5[X]$
- 5p a) Justificați că $p^4 = \hat{1}, \forall p \in \mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}$.
- 5p b) Demonstrați că polinomul f nu admite rădăcini în $\mathbb{Z}_5[X]$.
- 5p c) Determinați restul împărțirii polinomului f la polinomul $g = X^2 + 4X$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f(x) = x - \ln(x+1)$.
- 5p a) Studiați monotonia funcției f .
- 5p b) Demonstrați că funcția f este inversabilă.
- 5p c) Calculați $(f^{-1})'(e-2)$.
2. Fie $a_n = \int_0^1 \frac{x^n}{e^x} dx, \forall n \geq 1$.
- 5p a) Calculați I_1 .
- 5p b) Verificați dacă $(n+1)I_n = \frac{1}{e} + I_{n+1}, \forall n \geq 1$
- 5p c) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n$.



**MODEL PENTRU PREGĂTIREA PROBEI DE MATEMATICĂ DIN CADRUL
EXAMENULUI DE BACALAUREAT 2014
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

M_mate-info pentru filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică și pentru filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică;

Orice variantă de rezolvare corectă și completă se punctează corespunzător.

SUBIECTUL I**(30 de puncte)**

| | | |
|----|--|----------------------|
| 1. | $m + 3 = \frac{2m + 5m + 1}{2}$ $m = 1$ | 3p 2p |
| 2. | $\log_2 \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1$ $\frac{1}{2}[-1, 3] = \frac{1}{2}(-2) = -1$ Finalizare: $-1 + (-1) = -2$ | 2p 2p 1p |
| 3. | $\max f(x) = y_V = -\frac{\Delta}{4a}$ Finalizare: $\max f(x) = \frac{41}{4}$ | 3p 2p |
| 4. | $A_{10}^4 - A_9^3 =$ $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 - 9 \cdot 8 \cdot 7 =$ 4536 | 3p 1p 1p |
| 5. | $\sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} =$ $= \frac{4}{5}$ | 3p 2p |
| 6. | $C \in Ox \Leftrightarrow C(a, 0)$ $\overrightarrow{AC} = (a - 5)\vec{i} - 2\vec{j}$, $\overrightarrow{BC} = a\vec{i} - 3\vec{j}$ $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow a(a - 5) + 6 = 0 \Leftrightarrow a_1 = 2, a_2 = 3$ $C_1(2, 0), C_2(3, 0)$ | 1p 1p 2p 1p |

SUBIECTUL II**(30 de puncte)**

| | | |
|------|--|----------------|
| 1.a) | $x = \sigma^{-1} \circ \tau$ $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ | 2p 2p 1p |
| 1.b) | $\sigma^6 = e \Rightarrow \operatorname{ord} \sigma = 6$ $\operatorname{Card} G = 6$ | 3p 2p |
| 1.c) | $\varepsilon(x^4) = 1 \Rightarrow x^4$ permutare pară $m(\sigma) = 7 \Rightarrow \varepsilon(\sigma) = -1 \Rightarrow \sigma$ permutare impară $S = \emptyset$ | 2p 2p 1p |

| | | |
|------|--|----------------------------------|
| 2.a) | (\mathbb{Z}_5^*, \cdot) grup cu patru elemente \Rightarrow $\hat{p}^4 = \hat{1}, \forall p \in \mathbb{Z}_5^*$ | 2p 3p |
| 2.b) | $f(\hat{0}) = \hat{3} \neq \hat{0}, f(\hat{1}) = \hat{1} \neq \hat{0}$ $f(\hat{2}) = \hat{2} \neq \hat{0}, f(\hat{3}) = \hat{1} \neq \hat{0}$ $f(\hat{4}) = \hat{3} \neq \hat{0}$ f nu admite rădăcini în $\mathbb{Z}_5[X]$ | 1p 2p 1p 1p |
| 2.c) | $f = (X^2 + \hat{4}X)q + aX + b$ $f(\hat{1}) = a + b = \hat{1}$ $f(\hat{0}) = b = \hat{3}$ $r = \hat{3}X + \hat{3}$ | 1p 1p 1p 2p |

SUBIECTUL III

(30 de puncte)

| | | |
|------|--|----------------------|
| 1.a) | $f'(x) = \frac{x}{x+1} > 0, \forall x \in \mathbb{R}_+$ f este strict crescătoare pe \mathbb{R}_+ | 3p 2p |
| 1.b) | Cum f este strict monotonă $\Rightarrow f$ este injectivă În plus, $f(0)=0$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$; cum f este continuă \Rightarrow $\text{Im } f = \mathbb{R}_+ \Rightarrow f$ este surjectivă. Deci f este bijectivă $\Rightarrow f$ inversabilă | 1p 2p 1p 1p |
| 1.c) | $f(e-1)=e-2$ și $f^{-1}(e-2)=e-1$ $f'(e-1) = \frac{e-1}{e} \neq 0 \Rightarrow$ $\exists (f^{-1})'(e-2) = \frac{e}{e-1}$ | 1p 2p 2p |
| 2.a) | $I_1 = \int_0^1 x e^{-x} dx = -x e^{-x} \Big _0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx$ Finalizare: $I_1 = \frac{e-2}{2}$ | 3p 2p |
| 2.b) | $(n+1)I_n = \int_0^1 (x^{n+1})' e^{-x} dx = x^{n+1} e^{-x} \Big _0^1 + \int_0^1 x^{n+1} e^{-x} dx$ $(n+1)I_n = \frac{1}{e} + I_{n+1}, \forall n \geq 1$ | 3p 2p |
| 2.c) | Din b) $\Rightarrow nI_n = \frac{1}{e} + I_{n+1} - I_n$ $(I_n)_{n \geq 1}$ descrescător, pozitiv, rezultă mărginit, deci convergent $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = \frac{1}{e}$ | 1p 2p 2p |