MODEL PENTRU PREGĂTIREA PROBEI DE MATEMATICĂ DIN CADRUL EXAMENULUI DE BACALAUREAT 2014
SUBIECT

M2-ştiinte ale naturii pentru filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări cu soluţii complete.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p 1. Arătaţi că numerele $1, \log_3 9$ şi $\sqrt[3]{64}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

5p 2. Determinaţi soluţiile reale ale ecuaţiei $\log_2(x+2)+\log_2 x=3$.

5p 3. Determinaţi $m \in \mathbb{R}$ ştiind că reprezentarea grafică a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+mx-2m$ este tangentă axei Ox.

5p 4. Calculaţi probabilitatea ca alegând un număr dintre C_4^2, C_5^2 şi A_4^3, acesta să fie divizibil cu 3.

5p 5. Se considera vectorii $\vec{v}_1=2\hat{i}+a\hat{j}$ şi $\vec{v}_2=(a+3)\hat{i}+2\hat{j}$, unde $a\in\mathbb{R}$. Determinaţi numărul $a>0$ pentru care vectorii sunt coliniari.

5p 6. Fie triunghiul ascuţitunghic ABC. Determinaţi măsura unghiului A, ştiind că $BC=6$ şi raza cercului circumscris triunghiului are lungimea egală cu $2\sqrt{3}$.

SUBIECTUL II **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0&0&a\\0&a&0\\a&0&0\end{pmatrix}$, unde $a\in\mathbb{R}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi mulţimea

G={ $X\in M_3(\mathbb{R})$ | $AX=XA$ }.

5p a) Determinaţi $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $\det A=1$.

5p b) Demonstraţi că $A^2X=XA^2$, oricare ar fi $X\in M_3(\mathbb{R})$.

5p c) Demonstraţi că pentru oricare $a,b\in\mathbb{R}$ matricea $aI_3+bA\in G$.

2. Se consideră polinomul $f=X^4-6X^3+13X^2+aX+b$, $f\in\mathbb{R}[X]$.

5p a) Pentru $a=b=1$ să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului f la $X+1$.

5p b) Determinaţi $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $(X-1)(X+2) \mid f$.

5p c) Determinaţi $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât f să admită două rădăcini duble.

SUBIECTUL III **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2014}+2014^x$.

5p a) Scrieţi ecuaţia tangentei la graficul functiei în punctul de abscisă $x_0=0$.

5p b) Demonstraţi că funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$.

5p c) Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x+1)-2015}{x}$.

2. Se consideră funcţiile $f_n : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n \ln x, n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Calculaţi $\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{f_1(x)} dx$.

5p b) Determinaţi punctele de inflexiune ale primitivelor funcţiei f_2 .

5p c) Calculaţi volumul corpului obţinut prin rotirea graficului funcţiei $g:[1,e] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f_3(x)$ în jurul axei *Ox*.

Model propus de Catedra de Matematică de la Colegiul Naţional "Gheorghe Sincai "- Bucureşti

MODEL PENTRU PREGĂTIREA PROBEI DE MATEMATICĂ DIN CADRUL EXAMENULUI DE BACALAUREAT 2014
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

M2-ştiinte ale naturii pentru filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii;
Orice variantă de rezolvare corectă şi completă se punctează corespunzător.

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\log_3 9 = 2$	**1p**
	$\sqrt[3]{64} = 4$	**1p**
	$1\cdot 4 = 2^2 \Leftrightarrow 1,\ \log_3 9,\ \sqrt[3]{64}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice	**3p**
2.	Condiţii de existenţă : $\begin{cases} x+2>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(0,\infty)$.	**1p**
	$\log_2(x^2+2x)=3 \Leftrightarrow x^2+2x-3=0$	**2p**
	$x_1 = 1\in(0,\infty)$ si $x_2=-3\notin(0,\infty)$, deci S={1}	**2p**
3.	Reprezentarea G_f este tangentă axei $Ox \Leftrightarrow \Delta=0$	**2p**
	$\Delta = m^2+8m$	**1p**
	$m^2+8m=0 \Leftrightarrow m_1=0, m_2=-8$, deci $m\in\{-8,0\}$	**2p**
4.	$C_4^2 = 6 \Rightarrow 3 \mid C_4^2$	**1p**
	$C_5^2 = 10 \Rightarrow 3 \nmid C_5^2$	**1p**
	$A_4^3 = 24 \Rightarrow 3 \mid A_4^3$	**1p**
	$p=\dfrac{2}{3}$	**2p**
5.	Dacă $\vec{v_1}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}$ şi $\vec{v_2}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}$, atunci $\vec{v_1},\vec{v_2}$ coliniari $\Leftrightarrow \dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2} \Leftrightarrow$	**2p**
	$\dfrac{2}{a+3}=\dfrac{a}{2} \Leftrightarrow a^2+3a-4=0 \Leftrightarrow$	**1p**
	$a_1=-4<0, a_2=1>0$, deci $a\in\{1\}$	**2p**
6.	$\dfrac{a}{\sin A}=2R$	**2p**
	$\dfrac{6}{\sin A}=2\cdot 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	**1p**
	Cum triunghiul este ascuţitunghic, obţinem că $m(\sphericalangle A)=\dfrac{\pi}{3}$.	**2p**

SUBIECTUL II **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=-a^3$	**2p**
	$-a^3=-1,\ a\in\mathbb{R}$	**2p**
	Se obţine a=1	**1p**

1.b)	$A^2=\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}=a^2 I_3$ $A^2X=a^2I_3X=a^2X$ $XA^2=Xa^2I_3=a^2X$ Finalizare $A^2X=XA^2$	**2p** **1p** **1p** **1p**
1.c)	$A(aI_3+bA)=aA+bA^2=aA+ba^2I_3$, oricare $a,b\in\mathbb{R}$ $(aI_3+bA)A=aA+bA^2=aA+ba^2I_3$, oricare $a,b\in\mathbb{R}$ Cum $aI_3+bA\in M_3(\mathbb{R})$, în concluzie $aI_3+bA\in G$	**2p** **2p** **1p**
2.a)	a=b=1$\Rightarrow f=X^4-6X^3+13X^2+X+1$ Din schema lui Horner obţinem $f=(X+1)(X^3-7X^2+20X-19)+20$ Câtul este $X^3-7X^2+20X-19$, iar restul este 20	**1p** **3p** **1p**
2.b)	(X-1)(X+2) $\mid f\Leftrightarrow\begin{cases} f(1)=0 \\ f(-2)=0 \end{cases}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\begin{cases} a+b=-8 \\ -2a+b=-116 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ a=36, b= - 44	**1p** **2p** **2p**
2.c)	Impunem condiţia de rădăcini duble, de exemplu $x_1=x_2, x_3=x_4$ Din relaţiile lui Viete obţinem $\begin{cases} x_1+x_3=3 \\ x_1^2+4x_1x_3+x_3^2=13 \end{cases}$ $x_1=x_2=1, x_3=x_4=2$ $\Leftrightarrow\begin{cases} f(1)=0 \\ f(2)=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a+b=-8 \\ 2a+b=-20 \end{cases}$ Finalizare: a= -12, b= 4.	**1p** **1p** **1p** **1p** **1p**

SUBIECTUL III **(30 de puncte)**

1.a)	Ecuaţia tangentei la reprezentarea grafică a funcţiei f, în punctul $(x_0, f(x_0))$ este $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ $f'(x)=2014x^{2013}+2014^x\cdot\ln 2014$ $f(0)=1$, $f'(0)=\ln 2014$ Finalizare: $y=x\cdot\ln 2014+1$	**1p** **2p** **1p** **1p**
1.b)	$f''(x)=2014\cdot 2013x^{2012}+2014^x\cdot\ln^2 2014$, oricare $x\in\mathbb{R}$ Argumentarea faptului că $f''(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$ ceea ce implică faptul că f este convexă pe $\mathbb{R}$	**2p** **2p** **1p**
1.c)	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x+1)-2015}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x+1)^{2014}+2014^{x+1}-2015}{x}=$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x+1)^{2014}-1}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{2014(2014^x-1)}{x}$ Finalizare :2014 + 2014 ln2014	**2p** **1p** **2p**

2.a)	$\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{f_1(x)}dx = \int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x\ln x}dx = \int_e^{e^2} \frac{1}{x}dx =$	**3p**
	$= \ln x \Big\|_e^{e^2} = \ln e^2 - \ln e = 1$	**2p**
2.b)	Fie F_2 o primitivă a funcţiei $f_2 \Rightarrow F_2$ derivabilă şi $F_2' = f_2 \Rightarrow F_2'' = f_2'$	**2p**
	$f_2'(x) = (x^2 \ln x)' = x(2\ln x + 1)$	
	$F_2''(x) = 0 \Leftrightarrow x(2\ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}$	**2p**
	Finalizare: $x = e^{-\frac{1}{2}}$ unicul punct de inflexiune	**1p**
2.c)	$g(x) = x^3 \ln x$	
	$V(C_g) = \pi\int_1^e g^2(x)dx =$	**2p**
	$= \pi\int_1^e x^6 \ln^2 x dx = \pi\left(\frac{x^7}{7}\ln^2 x \Big\|_1^e - \int_1^e \frac{x^7}{7}\cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x}dx\right) =$	**2p**
	$= \frac{37e^7 - 2}{7^3}$.	**1p**

Model propus de Catedra de Matematică de la C.N. "Gheorghe Sincai "