Concursul Național de Matematică "Arhimede"
Ediția a XI-a, Etapa a III-a, 10 mai 2014

Clasa a V-a

I. Asociația de părinți a unei școli are la dispoziție suma de 2014 lei pentru a cumpăra caiete pentru elevii acestei școli. Prețul unui singur caiet este de 3 lei, dar acestea se pot găsi și în pachete promoționale de câte 13 caiete, pachet care costă 27 lei.

(4p) **a)** Să se afle numărul maxim de caiete ce pot fi cumpărate cu suma de 2014 lei.

(5p) **b)** Să se afle câți lei ar fi plătit în plus asociația dacă ar fi cumpărat același număr de caiete determinat anterior, dar fără a beneficia de promoție.

Prof. Traian Preda

II. *(4p)* **a)** Fie $A=\left\{\frac{2025}{11},\frac{2026}{12},\frac{2027}{13},\ldots\right\}$.

Să se afle $card(A\cap N)$.

(5p) **b)** Aflați cardinalul mulțimii: $A=\{\overline{ab} \mid a^2+b^2>\overline{ab}\}$

Prof. Traian Preda

III. Fie A o mulțime formată din 6 puteri consecutive ale lui 3.

(4p) **a)** Să se afle câte submulțimi ale lui A de 5 elemente au produsul elementelor un pătrat perfect.

(5p) **b)** Să se arate că există o submulțime a lui A de 5 elemente care au suma elementelor un pătrat perfect.

Prof. Traian Preda

IV. *(4p)* **a)** Să se afle numerele naturale nenule a și b, știind că $a+1$ se divide cu b și $b+1$ se divide cu a.

(5p) **b)** Câte numere de 10 cifre distincte există?

***

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. La fiecare subiect se acordă 1 punct din oficiu.
Punctajul maxim se acordă pentru orice rezolvare corectă și completă, indiferent de metodă.
Timp de lucru: **2 ore 30 min.**

Concursul Național de Matematică "Arhimede"
Ediția a XI-a, Etapa a III-a, 10 mai 2014

Clasa a VI-a

I. Să se arate că:

(4p) **a)** $a^0 + a^1 + a^2 + \ldots + a^n = \dfrac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$, pentru orice $a \in Q$, $a \neq 1$.

(5p) **b)** $\dfrac{1}{2014} + \dfrac{1}{2014^2} + \dfrac{1}{2014^3} + \ldots + \dfrac{1}{2014^{2014}} < \dfrac{1}{2013}$.

Prof. Ion Neață

II. *(4p)* **a)** Să se arate că pentru orice $n \geq 3$, există numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ astfel încât: $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ şi $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \ldots + \dfrac{1}{x_n} = 1$.

(5p) **b)** Să se arate că pentru orice $n \geq 3$ există n numere naturale nenule distincte ale căror cel mai mic multiplu comun să fie sumă de n divizori naturali distincți ai lui.

Gh. Stoica, Petroşani

III. Fie triunghiul ABC şi punctele $D \in (BC)$, $E \in (DC)$ astfel încât $\angle BAD \equiv \angle DAE \equiv \angle EAC$

(4p) **a)** Demonstrați că segmentele $[BD]$, $[DE]$ şi $[EC]$ nu pot fi toate trei congruente.

(5p) **b)** Ştiind că există un punct T pe bisectoarea $\angle DAE$ astfel încât $BT \perp AD$ şi $CT \perp AE$, să se demonstreze că ΔABC este isoscel.

IV. *(9p)* În triunghiul isoscel $(AB \equiv AC)$ cu $m(\angle A) = 80^\circ$ ducem $AD \perp BC$. Se consideră punctual $E \in (AC)$ astfel încât $m(\angle ABE) = 30^\circ$ şi AT bisectoarea unghiului DAC, $T \in (DC)$. Dacă notăm $AD \cap BE = \{F\}$, să se demonstreze că ΔEFT este echilateral.

Prof. Traian Preda

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. La fiecare subiect se acordă 1 punct din oficiu.
Punctajul maxim se acordă pentru orice rezolvare corectă şi completă, indiferent de metodă.
Timp de lucru: **2 ore 30 min.**

Concursul Național de Matematică "Arhimede"
Ediția a XI-a, Etapa a III-a, 10 mai 2014

Clasa a VII-a

I. *(4p)* **a)** Fie $a,b,c \in R^*$. Să se arate că:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-9=\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(b-c)^2}{bc}+\frac{(c-a)^2}{ca}$$

Gh. Stoica, Petroşani

(5p) **b)** Demonstrați că dacă $x,y,z>0$ atunci

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+z^2}>x+\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

II. *(4p)* **a)** Fie a,b,c numere reale. Demonstrați identitatea:

$$(a+b)(b+c)(c+a)+abc=(a+b+c)(ab+bc+ca).$$

(5p) **b)** Arătați că dacă suma şi produsul a trei numere întregi se divid cu un număr prim, atunci cel puțin unul din numere se divide cu acel număr prim.

Gh. Stoica, Petroşani

III. *(4p)* **a)** Fie pătratul $ABCD$ de latură a. Pe laturile AD şi BC, ca baze, construim triunghiurile isoscele AED şi BFC cu vârfurile E şi F în interiorul pătratului şi unghiurile de la baze de 30^0. Dacă notăm $\ell_1=AC+BD$ şi $\ell_2=AE+ED+EF+FB+FC$, calculați raportul ℓ_1/ℓ_2.

(5p) **b)** Fie dreptunghiul $ABCD$ de laturi $AD=BC=a$ şi $AB=DC=b$, $a<b$. Construim pe AB şi BC ca baze triunghiurile isoscele ADE şi BFC cu unghiurile de la baze de 30^0 şi vârfurile E şi F în interiorul dreptunghiului. Fie $\{O\}=AC\cap EF$. Să se arate că $AE+EO+ED<AC$.

Alexandrescu P.

IV. Fie triunghiul ABC şi punctele $D\in(BC)$, $E\in(AC)$, $F\in(AB)$ astfel încât patrulaterul $AEDF$ să fie paralelogram. Notăm cu M, N, P mijloacele segmentelor (BD), (DC), respectiv (EF). Paralela dusă prin punctul M la dreapta AC intersectează paralela dusă prin punctul N la dreapta AB în punctul Q.
Să se demonstreze că:

(4p) **a)** $OD \parallel PQ$, unde $\{O\}=ME\cap NF$;

(5p) **b)** PQ are lungime constantă pentru orice punct $D\in(BC)$

Prof. Traian Preda

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. La fiecare subiect se acordă 1 punct din oficiu.
Punctajul maxim se acordă pentru orice rezolvare corectă şi completă, indiferent de metodă.
Timp de lucru: **3 ore.**