Duminică, 4 mai 2014

Problema 1. Fie x, y şi z numere reale strict pozitive astfel încât $xy + yz + zx = 3xyz$. Să se demonstreze inegalitatea

$$x^2y + y^2z + z^2x \geq 2(x + y + z) - 3$$

şi să se determine când are loc egalitatea.

Problema 2. Un *număr special* este un număr natural nenul n pentru care există numerele naturale nenule a, b, c şi d astfel încât

$$n = \frac{a^3 + 2b^3}{c^3 + 2d^3}.$$

Să se demonstreze că:

(a) există o infinitate de *numere speciale*;

(b) 2014 nu este un *număr special*.

Problema 3. Fie $ABCD$ un trapez înscris în cercul Γ cu diametrul AB. Fie E punctul de intersecţie al diagonalelor AC şi BD. Cercul cu centrul B şi rază BE intersectează pe Γ în punctele K şi L, unde K este de aceeaşi parte cu C faţă de AB. Dreapta perpendiculară în E pe BD intersectează pe CD în M.

Să se demonstreze că dreptele KM şi DL sunt perpendiculare.

Problema 4. Fie n un număr natural nenul. Un hexagon regulat cu latura de lungime n este împărţit prin drepte paralele cu laturile sale, în triunghiuri echilaterale cu laturi de lungime 1.

Să se găsească numărul tuturor hexagoanelor regulate ale căror vârfuri sunt vârfuri ale triunghiurilor echilaterale.

Timp de lucru: 4 ore şi 30 minute
Fiecare problemă este notată cu 10 puncte