Colegiul Naţional *Mihai Eminescu* 25 aprilie 2014
Catedra de matematică

Teză unică pe semestrul al II-lea - Clasa a XII-a - NUMARUL 1

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
(Nota la teză se obţine din rotunjirea numărului de puncte împărţit la 10.)

Subiectul I (30 puncte)

1. Calculaţi modulul numărului complex $z = \dfrac{i}{1+i}$.

2. Determinaţi punctele de intersecţie ale graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-6$ cu dreapta de ecuaţie $y=x$.

3. Rezolvaţi ecuaţia $x+4^{\log_2 x}=20,\ x\in\mathbb{R}$.

4. Determinaţi probabilitatea ca alegând o submulţime a mulţimii $M=\{1,2,3,4,5\}$, ea să conţină numai elemente numere impare.

5. Fie punctele $A(1,2)$ şi $B(-1,4)$. Scrieţi ecuaţia mediatoarei segmentului $[AB]$.

6. Ştiind că $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ şi $\cos\alpha=-\dfrac{1}{3}$, calculaţi $\sin(2\alpha)$.

Subiectul II (30 puncte)

1. Fie A matricea pătratică de ordinul 3 cu toate elementele egale cu 1 şi $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Calculaţi determinantul matricei $A-3I_3$;

b) Determinaţi numărul natural n ştiind că $\det\left(A^n+I_3\right)=82$;

c) Arătaţi că matricea $B=I_3+A$ este inversabilă şi calculaţi B^{-1}.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-12X+m$, unde $m\in\mathbb{R}$ şi fie x_1,x_2,x_3 rădăcinile lui f.

a) Determinaţi valorile lui m ştiind că polinomul f se divide cu $X-2$;

b) Determinaţi rădăcinile x_1,x_2,x_3 ştiind că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-48$;

c) Determinaţi valorile lui m ştiind că polinomul f are o rădăcină dublă.

Subiectul III (30 puncte)

1. Fie funcţia $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

a) Determinaţi asimptotele la graficul funcţiei f;

b) Determinaţi imaginea funcţiei f;

c) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^x$.

2. Pentru fiecare număr natural n notăm $I_n=\displaystyle\int_1^2\frac{x^n}{2x+1}dx$.

a) Calculaţi I_1;

b) Arătaţi că $2I_{n+1}+I_n=\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$;

c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}I_n$.

Colegiul Naţional *Mihai Eminescu* 25 aprilie 2014
Catedra de matematică

Teză unică pe semestrul al II-lea - Clasa a XII-a - NUMARUL 2

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
(Nota la teză se obţine din rotunjirea numărului de puncte împărţit la 10.)

Subiectul I (30 puncte)

1. Calculaţi modulul numărului complex $z=\dfrac{2}{-1+i}$.

2. Determinaţi punctele de intersecţie ale graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-12$ cu dreapta de ecuaţie $y=-x$.

3. Rezolvaţi ecuaţia $x+9^{\log_3 x}=12$, $x\in\mathbb{R}$.

4. Determinaţi probabilitatea ca alegând o submulţime a mulţimii $M=\{0,1,2,3,4,5\}$, ea să conţină numai elemente numere pare.

5. Fie punctele $A(2,1)$ şi $B(-2,3)$. Scrieţi ecuaţia perpendicularei din A pe $[AB]$.

6. Ştiind că $\alpha\in\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$ şi $\sin\alpha=-\dfrac{1}{3}$, calculaţi $\cos(2\alpha)$.

Subiectul II (30 puncte)

1. Fie $A=\begin{pmatrix}3&2&1\\6&4&2\\9&6&3\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ şi $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Calculaţi determinantul şi rangul matricei A;

b) Arătaţi că $A^2=10A$;

c) Arătaţi că matricea $B=I_3+A$ este inversabilă şi calculaţi B^{-1}.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+mX^2-4$, unde $m\in\mathbb{R}$ şi fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile lui *f*.

a) Determinaţi valorile lui *m* ştiind că polinomul *f* se divide cu $X+1$;

b) Calculaţi rădăcinile x_1, x_2, x_3 ştiind că $x_1^3+x_2^3+x_3^3+4x_1x_2x_3=1$;

c) Determinaţi valorile lui *m* ştiind că $x_1x_2=2$.

Subiectul III (30 puncte)

1. Fie funcţia $f:(-\infty,-1]\cup(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$.

a) Determinaţi asimptotele la graficul funcţiei *f*;

b) Determinaţi imaginea funcţiei *f*;

c) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)\right)^x$.

2. Pentru fiecare număr natural *n* notăm $I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{3x+1}dx$.

a) Calculaţi I_1;

b) Arătaţi că $3I_{n+1}+I_n=\dfrac{1}{n+1}$;

c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$.