

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa finală, 8 Aprilie 2014

CLASA a X-a

Problema 1. Fie n un număr natural nenul. Pentru fiecare număr natural k notăm cu $a(k, n)$ numărul divizorilor naturali d ai lui k astfel încât $k \leq d^2 \leq n^2$. Să se calculeze $\sum_{k=1}^{n^2} a(k, n)$.

Soluție. ¹Pentru $1 \leq k \leq n^2$, fie $A(k, n)$ mulțimea divizorilor naturali d ai lui k astfel încât $k \leq d^2 \leq n^2$. Un număr natural $d \in \{1, 2, \dots, n\}$ aparține mulțimilor

$$A(d, n), A(2d, n), \dots, A(d^2, n)$$

și numai acestora.

..... **3 puncte**

Prin urmare, contribuția fiecărui d în suma $\sum_{k=1}^{n^2} a(k, n) = \sum_{k=1}^{n^2} |A(k, n)|$ este $\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{d \text{ ori}} = d$.

..... **2 puncte**

$$\text{Așadar } \sum_{k=1}^{n^2} a(k, n) = \sum_{d=1}^n d = n(n+1)/2.$$

..... **2 puncte**

Problema 2. Considerăm funcția $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ cu proprietățile:

- a) $f(1) = 1$,
- b) $f(p) = 1 + f(p-1)$ pentru orice număr prim p ,
- c) $f(p_1 p_2 \dots p_n) = f(p_1) + f(p_2) + \dots + f(p_n)$ pentru orice numere prime, nu neapărat distincte.

Să se arate că $2^{f(n)} \leq n^3 \leq 3^{f(n)}$ pentru orice număr natural $n, n \geq 2$.

Soluție. Cum 2 este număr prim, avem $f(2) = 1 + f(1) = 2$, de unde $2^2 \leq 2^3 \leq 3^2$. Vom demonstra dubla inegalitate $3 \log_3 n \leq f(n) \leq 3 \log_2 n$ prin inducție după n .

..... **1 punct**

¹Cerința este echivalentă cu dubla numărare a cardinalului mulțimii $S(n) = \{(k, d) \mid d \mid k, k \leq d^2 \leq n^2, 1 \leq k \leq n^2\}$.

Fie n un număr natural, $n \geq 3$, și fie $n = p_1 p_2 \cdots p_k$ descompunerea sa în factori primi, nu neapărat distincți.

..... **1 punct**

Dacă n nu este prim, i.e. $k \geq 2$, din ipoteza de inducție avem $f(n) = f(p_1) + f(p_2) + \cdots + f(p_k) \geq 3 \sum_{i=1}^k \log_3 p_i = 3 \log_3 n$ și

..... **1 punct**

$$f(n) \leq 3 \sum_{i=1}^k \log_2 p_i = 3 \log_2 n.$$

..... **1 punct**

Dacă n este prim, i.e. $k = 1$, atunci $n - 1$ este număr par și $f(n) = 1 + f(n - 1) = 1 + f(2 \frac{n-1}{2}) = 1 + f(2) + f(\frac{n-1}{2}) = 3 + f(\frac{n-1}{2})$.

..... **1 punct**

$$\text{Atunci } f(n) = 3 + f(\frac{n-1}{2}) \leq 3 + 3 \log_2 \frac{n-1}{2} = 3 \log_2 (n - 1) \leq 3 \log_2 n$$

..... **1 punct**

$$\text{și } f(n) = 3 + f(\frac{n-1}{2}) \geq 3 + 3 \log_3 \frac{n-1}{2} = 3 \log_3 \frac{3(n-1)}{2} \geq 3 \log_3 n.$$

..... **1 punct**

Problema 3. Fie n un număr natural nenul și $A = \{1, 2, \dots, n\}$. Să se determine numărul funcțiilor crescătoare $f : A \rightarrow A$ cu proprietatea că $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ pentru orice $x, y \in A$.

Soluție. Observăm că $f(k + 1) - f(k) \stackrel{\text{not}}{=} a_k \in \{0, 1\}$, $k = 1, 2, \dots, n - 1$.

..... **1 punct**

Mai mult, dacă $a_k \in \{0, 1\}$, atunci $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ pentru orice $x, y \in A$.²

..... **1 punct**

Fixând $f(0) = a$ și $f(n) = b$, avem $b - a = a_1 + \cdots + a_{n-1}$, deci numărul funcțiilor f cu proprietatea cerută este egal cu numărul de alegeri a $b - a$ termeni egali cu 1 în suma $a_1 + \cdots + a_{n-1}$, adică $n(a, b) = C_{n-1}^{b-a}$.

..... **2 puncte**

$$\text{Prin urmare, numărul funcțiilor este } \sum_{0 \leq a \leq b \leq n} n(a, b) = \sum_{0 \leq a \leq b \leq n} C_{n-1}^{b-a} =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (n - k) C_{n-1}^k.$$

..... **2 puncte**

$$\hat{\text{În total sunt }} \sum_{k=0}^{n-1} n C_{n-1}^k - \sum_{k=1}^{n-1} k C_{n-1}^k = n 2^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} (n - 1) C_{n-2}^{k-1} = n 2^{n-1} - (n - 1) 2^{n-2} = (n + 1) 2^{n-2} \text{ funcții.}$$

..... **1 punct**

Problema 4. Fie n un număr întreg, $n \geq 2$, și fie numerele complexe $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ cu $a_n \neq 0$. Să se arate că sunt echivalente afirmațiile:

²Prin urmare, o funcție f cu proprietățile cerute este complet determinată de n -uplul $(f(0), a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \in A \times \{0, 1\} \times \cdots \times \{0, 1\}$ ce respectă condiția $f(0) + a_1 + \cdots + a_{n-1} \leq n$.

P. $|a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0| \leq |a_n + a_0|$ pentru orice număr complex z de modul 1,

Q. $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 0$ și $a_0/a_n \in [0, \infty)$.

Soluție. Q. \implies P. Dacă $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 0$ și $a_0/a_n \in [0, \infty)$, atunci $|a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0| = |a_n z^n + a_0| \leq |a_n z^n| + |a_0| = |a_n| + |a_0| = |a_n + a_0|$, pentru orice număr complex z de modul 1.

..... **2 puncte**

P. \implies Q. Fie $g(z) = a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z$, $z \in \mathbb{C}$ și $w = a_0 + a_n$. Pentru fiecare $\varepsilon \in U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ avem $|a_n + g(\varepsilon) + a_0| \leq |a_n + a_0|$, adică $|w + g(\varepsilon)| \leq |w|$ sau $|g(\varepsilon)|^2 + w\overline{g(\varepsilon)} + \overline{w}g(\varepsilon) \leq 0$.

..... **2 puncte**

Cum $\sum_{\varepsilon \in U_n} \varepsilon^k = 0$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, avem $\sum_{\varepsilon \in U_n} g(\varepsilon) = 0$,

..... **1 punct**

de unde, prin sumare, $\sum_{\varepsilon \in U_n} |g(\varepsilon)|^2 + w\overline{g(\varepsilon)} + \overline{w}g(\varepsilon) = \sum_{\varepsilon \in U_n} |g(\varepsilon)|^2 \leq 0$, ceea ce implică $g(\varepsilon) = 0$, oricare ar fi $\varepsilon \in U_n$. De aici obținem $a_k = \frac{1}{n} \sum_{\varepsilon \in U_n} g(\varepsilon)/\varepsilon^k = 0$, $k = 1, 2, \dots, n-1$.

..... **1 punct**

Obținem $|a_n z^n + a_0| \leq |a_n + a_0|$ pentru orice număr complex z de modul 1. Notând $c = a_0/a_n$ și $t = z^n$, avem $|t + c| \leq |1 + c|$ pentru orice număr complex t de modul 1. Fie P, M, A punctele din planul complex de abscise $t, -c$, respectiv 1. Atunci $PM \leq MA$, oricare ar fi P pe cercul unitate, prin urmare cercul de centru M și raza MA conține cercul unitate. Cum cele două cercuri au punctul comun A , deducem că sunt tangente în A , deci M și O sunt coliniare cu A și $MA \geq OA = 1$. Deducem că $-c \leq 0$, deci $c \in [0, \infty)$.

..... **1 punct**