Societatea de Ştiinţe
Matematice din România

Ministerul Educaţiei Naţionale

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Sibiu, 8 Aprilie 2014

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE, CLASA a V-a

Problema 1. Demonstraţi că produsul oricăror trei numere naturale impare consecutive se poate scrie ca suma a trei numere naturale consecutive.

Soluţie. Justificarea faptului că dintre oricare trei numere naturale impare consecutive unul dintre ele este multiplu de trei. **3p**

Deducem că produsul celor trei numere este multiplu de 3 .... **2p**

Orice număr de forma $3k, k \in \mathbb{N}^*$ se scrie $3k = (k-1) + k + (k+1)$ **2p**

Problema 2. Spunem că unui număr natural n i se aplică o transformare *interesantă* dacă n se înmulţeşte cu 2, apoi rezultatul se măreşte cu 4; spunem că lui n i se aplică o transformare *deosebită* dacă n se înmulţeşte cu 3, apoi rezultatul se măreşte cu 9; spunem că lui n i se aplică o transformare *minunată* dacă n se înmulţeşte cu 4, apoi rezultatul se măreşte cu 16.

a) Arătaţi că există un singur număr natural care, prin trei transformări succesive, una *interesantă*, una *deosebită* şi una *minunată*, aplicate în această ordine, devine 2020.

b) Determinaţi numerele naturale care, după exact două transformări succesive diferite, dintre cele trei tipuri, devine 2014.

Soluţie. a) Fie n numărul căutat. Se obţine relaţia $4\,[3(2n+4)+9]+16 = 2020$ **3p**

Rezultă $n = 80$ **1p**

b) Deoarece o transformare deosebită duce la un multiplu de 3, iar una minunată duce la un multiplu de 4, ultima transformare nu poate fi decât interesantă. **1p**

Numărul obţinut după prima transformare este 1005. .... **1p**

Deoarece 1005 este impar, prima transformare nu poate fi decât deosebiteă, iar numărul iniţial este 332. .... **1p**

Problema 3. Arătaţi că există un multiplu al numărului 2013 care se termină în 2014.

Soluţie. Considerăm numerele $n_1 = 2014$, $n_2 = 20142014$, $n_3 = 201420142014$, ..., $n_{2014} = \underbrace{20142014...2014}_{2014 \text{ ori}}$ **2p**

Conform principiului cutiei, există cel puţin două dintre cele 2014 numere care dau acelaşi rest la împărţirea cu 2013, deci diferenţa lor se divide cu 2013. .... **2p**

Fie aceste numere n_i, n_j, $i > j$, $i, j \in \{1, 2, 3, ..., 2014\}$.

Obţinem $n_i - n_j = \underbrace{20142014...2014}_{(i-j) \text{ ori}}\underbrace{00...0}_{4j \text{ ori}}$ **1p**

Cum orice putere a lui 10 este relativ primă cu 2013, rezultă că $n = \underbrace{20142014...2014}_{(i-j) \text{ ori}}$ se divide cu 2013. .... **2p**

Problema 4. O sută de cutii sunt numerotate de la 1 la 100. Fiecare cutie conţine cel mult 10 bile. Numerele bilelor din oricare două cutii numerotate cu numere consecutive diferă prin 1. Cutiile numerotate cu numerele $1, 4, 7, 10, \ldots, 100$ conţin, în total, 301 bile. Care este numărul maxim de bile din cele 100 de cutii?

Soluţie.

Numerele de bile din două cutii vecine diferă prin 1, deci două cutii vecine pot conţine, n total, cel mult $10 + 9 = 19$ bile. **1p**

Cutiile $(2,3)$, $(5,6)$, , ..., $(98,99)$ pot conţine, în total, cel mult $33 \cdot 19 = 627$ bile, deci numărul total de bile din cele 100 de cutii nu poate depaşi $627 + 301 = 928$. **3p**

Există o modalitate de aşezare a 928 bile astfel încât să fie satisfăcute cerinţele problemei. De exemplu, este convenabilă următoarea modalitate de distribuţie a bilelor:

$$\underbrace{[9\,10\,9\,8\,9\,10]\ldots[9\,10\,9\,8\,9\,10]}_{10\,\text{grupe}}\quad\underbrace{[9\,10\,9\,10\,9\,10]\ldots[9\,10\,9\,10\,9\,10]}_{6\,\text{grupe}}\quad[9\,10\,9\,8]$$

. . . . **3p**

Timp de lucru 2 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.