Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Sibiu, 8 Aprilie 2014

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE, CLASA a VI-a

Problema 1.
Se consideră mulţimea A a numerelor de patru cifre cel mult egale cu 2014. Determinaţi numărul maxim de elemente al unei submulţimi a lui A care conţine numai pătrate perfecte, oricare două prime între ele.

Soluţie. Dacă $n^2 \in A$, atunci $n \in \{32, 33, 34, ..., 44\}$ **3p**

Pentru a îndeplini condiţiile din enunţ, dintre elementele pătrate perfecte ale lui A, vom păstra un pătrat perfect multiplu de 4, un pătrat perfect multiplu de 9, dar nu şi de 4, un pătrat perfect multiplu de 25, care nu este multiplu de 4 sau 9 etc **3p**

Un exemplu poate fi: $32^2,\ 33^2,\ 35^2,\ 37^2,\ 41^2$ şi 43^2.

Numărul maxim de elemente este 6 .... **1p**

Problema 2. Un număr natural $n > 1$ se numeşte *p-periodic* dacă $\dfrac{1}{n}$ se poate scrie sub forma unei fracţii zecimale periodice simple, a cărei cea mai scurtă perioadă este formată din p cifre. Spre exemplu, numărul 9 este 1-periodic, deoarece $\dfrac{1}{9} = 0,(1)$, iar numărul 11 este 2-periodic, întrucât $\dfrac{1}{11} = 0,(09)$.

a) Determinaţi numerele naturale p-periodice n care au proprietatea că prima cifră a perioadei numărului $\dfrac{1}{n}$ este nenulă.

b) Determinaţi cel mai mare număr prim care este 4-periodic.

Soluţie. a) Deoarece $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{10}$, rezultă $n \leq 10$ şi $(n, 10) = 1$ **2p**

Înseamnă că $n \in \{3, 7, 9\}$ **1p**

b) $\frac{1}{n} = \frac{m}{9999}$, unde $1 \leq m \leq 9998$ **1p**

Deci $n \cdot m = 9999 = 3^2 \cdot 11 \cdot 101$

n este număr prim şi cel mai mare în condiţiile date, rezultă $n = 101$

Într-adevăr, $\frac{1}{101} = \frac{99}{9999} = 0,(0099)$ **3p**

Problema 3. Se consideră un număr natural n. Spunem că un triplet de numere naturale nenule, nu neapărat distincte (x, y, z) este de tip n dacă $x + y + z = n$ şi notăm cu $s(n)$ numărul tripletelor de tip n.

a) Arătaţi că nu există niciun număr natural n pentru care $s(n) = 14$.

b) Determinaţi cel mai mic număr natural n pentru care $s(n) > 2014$.

Soluţie. a) Trei numere diferite două câte două generează 6 triplete. Dacă numai două dintre numerele tripletului sunt egale se pot forma 3 astfel de triplete. Nu se poate forma decât cel mult un triplet cu toate componentele egale. Rezultă că numărul tripletelor este de forma $3k$ sau $3k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, iar 14 este de forma $3k + 2$. În concluzie nu există numere naturale care să verifice condiţia **3p**

b) Pentru $x = 1$ rezultă $y + z = n - 1$ şi avem $n - 2$ triplete.

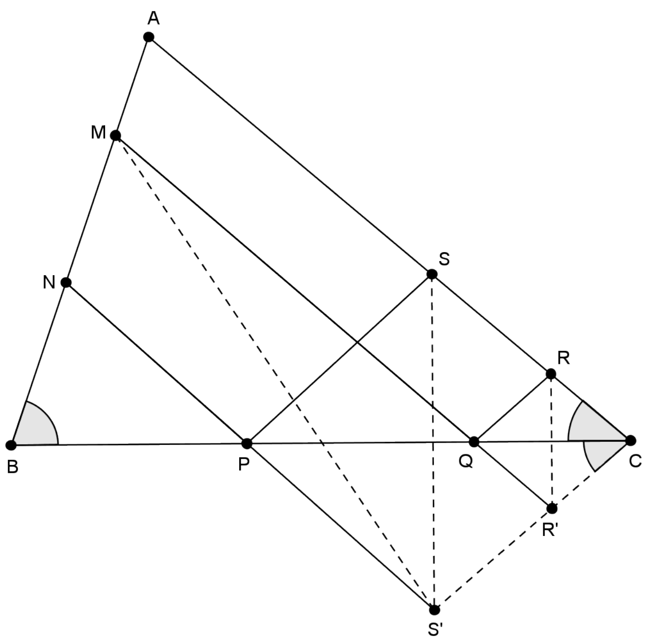
Pentru $x = 2$ rezultă $y + z = n - 2$ şi avem $n - 3$ triplete.

....

Pentru $x = n-2$ rezultă $y+z=2$ şi avem 1 triplet. **2p**
Numărul total de triplete este $1+2+...+(n-2) = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$
Din condiţia $(n-2)(n-1) \geq 4030$ şi n cel mai mic număr natural, rezultă $n = 65$ **2p**

Problema 4. În triunghiul ABC considerăm punctele $M, N \in (AB)$, $P, Q \in (BC)$ şi $S, R \in (AC)$ astfel încât $AM = CR$, $AN = CS$, $\sphericalangle MQB \equiv \sphericalangle RQC$ şi $\sphericalangle NPB \equiv \sphericalangle SPC$. Arătaţi că dacă $MQ + QR = NP + PS$, atunci triunghiul ABC este isoscel.

Soluţie.



Fie R' simetricul punctului R în raport cu dreapta BC. Rezultă că $\triangle QRC \equiv \triangle QR'C$. Deducem că $CR' = CR$, $\widehat{QCR'} \equiv \widehat{QCR}$ şi $\widehat{R'QC} \equiv \widehat{RQC}$. **1p**

Deoarece $\widehat{R'QC} \equiv \widehat{MQB}$ rezultă că punctele $M,\ Q,\ R'$ sunt coliniare, prin urmare $MR' = MQ + QR' = MQ + QR$ (1) **1p**

Analog, dacă S' este simetricul punctului S în raport cu dreapta BC, punctele $N,\ P,\ S'$ sunt coliniare şi $NS' = NP + PS' = NP + PS$ (2).

Din (1) şi (2) rezultă $MR' = NS'$ **2p**

Deoarece $\widehat{R'CQ} \equiv \widehat{RCQ} \equiv \widehat{PCS'}$ rezultă că punctele $C,\ R',\ S'$ sunt coliniare. Prin urmare $S'R' = S'C - R'C = SC - RC = AN - AM = MN$ **1p**

$\triangle MNS' \equiv \triangle S'R'M$ (L.L.L.) implică $\widehat{NMS'} \equiv \widehat{MS'R'}$, de unde $AB \parallel S'C$. Înseamnă că $\widehat{ABC} \equiv \widehat{BCS'} \equiv \widehat{ACB}$, aşadar $\triangle ABC$ este isoscel **2p**