mate.info.ro
Profu' de mate

Concursul Naţional de Matematică "Arhimede"
Ediţia a XI-a, Etapa a II-a, 01 martie 2014

Clasa a V-a

I. **1.** Să se determine mulţimile A şi B ştiind că sunt îndeplinite simultan condiţiile:

(3p) **a)** $A \cup B = \{a,b,c,d\}$

(3p) **b)** $A \setminus B = \{a,b\}$

(3p) **2.** Să se arate că numărul:

$$n = 1001^1 + 2002^2 + 3003^3 + 4004^4 + 2014$$

nu este pătrat perfect.

II. La un concurs de atletism fetele sunt numerotate pe tricou cu câte un număr impar începând cu 1, 3, 5,... iar băieţii cu câte un număr par începând cu 2, 4, 6,...
Suma tuturor numerelor de pe tricourile copiilor este egală cu 361.

(4p) **a)** Să se arate că la concurs avem un număr impar de fete.

(5p) **b)** Să se afle câţi băieţi şi câte fete participă la concurs dacă numărul de fete este mai mic decât numărul băieţilor.

Prof. Traian Preda

III. *(4p)* **a)** Să se afle numerele de două cifre, ştiind că adunându-le cu răsturnatele lor, obţinem pătratul sumei cifrelor lor.

(5p) **b)** Să se arate că există o infinitate de cuburi perfecte care se scriu ca sumă de două pătrate perfecte.

Gh. Stoica, Petroşani

IV. *(9p)* În vederea pregătirii unui concurs, un elev îşi propune ca, pe parcursul a 180 de zile, să rezolve 328 de probleme dintr-o culegere de probleme. Ştiind că el rezolvă cel puţin o problemă pe zi, să se arate că există o succesiune de zile pe parcursul cărora elevul rezolvă în total 31 de probleme.

Prof. Niculaie Marin Goşoniu

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. La fiecare subiect se acordă 1 punct din oficiu.
Punctajul maxim se acordă pentru orice rezolvare corectă şi completă, indiferent de metodă.
Timp de lucru: **2 ore 30 min.**

mate.info.ro
Profu' de mate

Concursul Naţional de Matematică "Arhimede"
Ediţia a XI-a, Etapa a II-a, 01 martie 2014

Clasa a VI-a

I. Fie x şi y numere naturale astfel încât

$$\frac{x}{9}=\frac{y}{10}$$

(4p) **a)** Să se afle x şi y ştiind că

$$x+y=2014$$

(5p) **b)** Să se afle x şi y ştiind că

$$y^2-x^2=171$$

II. *(5p)* **a)** Fie $M=\{2^x\cdot 3^y \mid x,y\in N\}$
Să se arate că oricare ar fi 25 de numere din M, există 4 al căror produs este puterea a patra a unui număr natural.

(4p) **b)** Să se arate că oricare ar fi 5 numere din M, printre ele există două al căror produs este pătrat perfect.

Prof. Niculaie Marin Goşoniu

III. Fie ΔABC ascuţitunghic şi punctele $M\in[BC]$, $N\in[MC]$ astfel încât $\angle BAM\equiv\angle CAN$.
Ducem $MP\perp AB$, $NQ\perp AC$, $P\in[AB]$, $Q\in[AC]$ şi notăm $PM\cap NQ=\{T\}$
Să se demonstreze că ΔABC este isoscel în fiecare din cazurile:

(4p) **a)** $[MP]\equiv[NQ]$

(5p) **b)** $[TP]\equiv[TQ]$

Prof. Traian Preda

IV. Se consideră mulţimea $A=\left\{\frac{2n+1}{n+1} \mid n\in N\right\}$

(4p) **a)** Să se demonstreze că orice trei numere din mulţimea A pot fi laturile unui triunghi.

(5p) **b)** Să se afle perimetrul maxim pe care poate să-l aibă un triunghi cu laturile în mulţimea A ştiind că perimetrul său este un număr natural şi să se afle valorile $m,n,p\in N$ pentru care se atinge acest maxim.

Prof. Traian Preda

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. La fiecare subiect se acordă 1 punct din oficiu.
Punctajul maxim se acordă pentru orice rezolvare corectă şi completă, indiferent de metodă.
Timp de lucru: **2 ore 30 min.**

mate.info.ro
Profu' de mate

Concursul Național de Matematică "Arhimede"
Ediția a XI-a, Etapa a II-a, 01 martie 2014

Clasa a VII-a

I. *(4p)* **a)** Să se arate că numărul

$$x=\sqrt{\frac{5}{0,0(2)}}+\sqrt{\frac{55}{0,0(02)}}+\sqrt{\frac{555}{0,0(002)}}$$

este natural.

(5p) **b)** Fie numerele pozitive a și b astfel încât $\frac{a}{3}=\frac{b}{2}$.

Să se verifice dacă are loc dubla inegalitate

$$\frac{a}{a+b}<\frac{a^2}{a^2+b^2}<\frac{a^3}{a^3+b^3}$$

II. *(4p)* **a)** Să se descompună mulțimea

$\{1,2,3,...,34\}$

În reuniune de submulțimi disjuncte având aceeași sumă a elementelor și astfel încât orice două submulțimi să aibă un număr diferit de elemente.

(5p) **b)** Aceeași problemă pentru mulțimea

$\{1,2,3,...,2014\}$

Prof. Traian Preda

III. Fie patrulaterul $ABCD$ cu AB paralelă cu DC, $P\in(AB)$, $PC\cap BD=\{M\}$, $PD\cap AC=\{N\}$ și $AC\cap BD=\{0\}$. Dacă $\frac{MP}{MC}+\frac{NP}{ND}=1$ atunci

(4p) **a)** $ABCD$ este paralelogram.

(5p) **b)** $\frac{OM}{MD}+\frac{ON}{NC}=\frac{1}{2}$

Prof. Ion Neață, Slatina, Olt

IV. În triunghiul dreptunghic ABC $(m(A)=90^0)$ se notează cu D și E piciorul înălțimii și respectiv piciorul medianei, duse din A.

(4p) **a)** Să se demonstreze că $BD=\frac{AB^2}{BC}$

(5p) **b)** Să se calculeze lungimile laturilor triunghiului știind că 50DE = 7BC și perimetrul triunghiului este 120m.

Prof. Chiriță Marcel

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. La fiecare subiect se acordă 1 punct din oficiu.
Punctajul maxim se acordă pentru orice rezolvare corectă și completă, indiferent de metodă.
Timp de lucru: **3 ore.**

mate.info.ro
Profu' de mate

Concursul Naţional de Matematică "Arhimede"
Ediţia a XI-a, Etapa a II-a, 01 martie 2014

Clasa a VIII-a

I. Se consideră expresia:

$$E(x)=\left(\frac{x-1}{x+1}+\frac{x+1}{x-1}\right)\cdot\left(\frac{x^3+x}{2x^3}-1\right)\cdot\frac{x}{x^2+1}$$

unde $x\in R\setminus\{0,1,-1\}$

(3p) **a)** Să se afle E(2).

(3p) **b)** Să se arate că $E(x)=-\frac{1}{x}$, $(\forall)x\in R\setminus\{0,1,-1\}$.

(3p) **c)** Să se afle $x\in R$ astfel încât

$$\left|E(x)+E\left(-\frac{1}{x}\right)\right|=\frac{x}{2}$$

II. Să se afle valoarea minimă a expresiei

$$x^2+y^2+z^2-x+2y-3z$$

în fiecare din cazurile:

(4p) **a)** $x,y,z\in R$.

(5p) **b)** $x,y,z\in Z$

în fiecare caz, să se afle când n realizează minimul.

Prof. Traian Preda, Niculaie Marin Goşoniu

III. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$, cu $AB=a$.
Fie E mijlocul $[A'D']$ şi $B'E\cap A'C'=\{F\}$, $AD'\cap DE=\{G\}$.

(4p) **a)** Să se calculeze FG.

(5p) **b)** Să se arate că $FG\perp A'C'$ şi $FG\perp AD'$.

Prof. Niculaie Marin Goşoniu

IV. *(9p)* Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu feţele laterale triunghiuri echilaterale şi O centrul bazei.
Pe munchiile VA, VB, VC şi VD se consideră punctele M, N, P respectiv Q astfel încât:
2VM = MA, VN = NB, 2VP = PC, 3VQ = QD.
Să se demonstreze că dreapta de intersecţie a planelor (OMN) şi (OPQ) este perpendiculară pe faţa (VAD).

Prof. Traian Preda

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. La fiecare subiect se acordă 1 punct din oficiu.
Punctajul maxim se acordă pentru orice rezolvare corectă şi completă, indiferent de metodă.
Timp de lucru: **3 ore.**