MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

Olimpiada de matematică
Etapa locală, 22 februarie 2014
Clasa a V-a

Toate subiectele sunt obligatorii. Timp efectiv de lucru: 2 ore
Fiecare subiect se punctează cu note de la 10 la 1.

1) Fie numărul $a = 2^{2014} + 2^{2013} + 2^{2010}$.
   a) Să se arate că $25 | a$.
   b) Să se determine ultimele trei cifre ale numărului a.

Florica Bogdan, Victor Bogdan, Mihăileşti

2) a) Calculaţi: $(2 + 4 + 6 + \ldots + 4026 - 2013\cdot 2014) : 2$

Marin Verona, Bolintin Vale

   b) Să se scrie numărul 3^{2015} ca o sumă de cuburi.

Florica Bogdan, Victor Bogdan, Mihăileşti

3) Comparaţi numerele:

$a=2^{2016}-2^{2015}-2^{2014}$ şi

$b=3^{1343}-3^{1342}$.

Radu Stănică, Frăteşti

4) Într-o livadă, pe un rând, sunt14 meri. Numărul merelor, din oricare doi meri vecini, diferă cu 3. Este posibil ca în toţi cei 14 meri să existe 2014 mere?

Ion Păun, Ogrezeni

Olimpiada de matematică
Etapa locală, 22 februarie 2014
Clasa a VI-a

Toate subiectele sunt obligatorii. Timp efectiv de lucru: 2 ore
Fiecare subiect se punctează cu note de la 10 la 1.

1) Fie numerele raţionale A şi B:

$A=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2015}$ şi $B=1+\frac{2}{4}+\frac{4}{6}+\frac{6}{8}+...+\frac{4028}{4030}$.

a) Comparaţi numerele A şi B.
b) Calculaţi media aritmetică a numerelor A şi B.

Marin Verona, Bolintin Vale

2)

a) Să se determine x din relaţia: $6+6\cdot 7+6\cdot 7^2+6\cdot 7^3+\ldots+6\cdot 7^{2013}=7^x-1$.

b) Să se determine numărul $\overline{abc}$ ştiind că $2^a\cdot(2^b+3)\cdot(2^c-11)=2014$.

Radu Stănică, Frăteşti

3) În triunghiul ABC, AB=12 cm, BC=8 cm şi $m(\angle ABC)=60^0$. Dacă AM este mediană în triunhiul ABC, arătaţi că AM=AC.

Păun Ion, Ogrezeni

4) Se consideră unghiurile adiacente AOB, BOC, COD şi DOE astfel încât punctele A, O, E sunt coliniare. Se ştie că:

$\frac{m(\angle AOB)}{3}=\frac{m(\angle BOC)}{4}$, $m(\angle BOC)=2\cdot m(\angle DOE)$ şi $\frac{m(\angle COD)}{5}=\frac{m(\angle DOE)}{6}$.

Determinaţi măsurile unghurilor AOB, BOC, COD, DOE.

Gazeta Matematică

Olimpiada de matematică
Etapa locală, 22 februarie 2014
Clasa a VII-a

Toate subiectele sunt obligatorii. Timp efectiv de lucru: 3 ore
Fiecare subiect se punctează cu note de la 10 la 1.

1) Să se determine x ϵ $\mathbf{N}^*$ ştiind că
$$1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+...+\frac{1}{1+2+...+x}=\frac{4028}{2015}.$$

Radu Stănică, Frăteşti

2) În paralelogramul MNPQ, O este punctul de intersecţie al diagonalelor. Demonstraţi că aria triunghiului MON este un sfert din aria lui MNPQ.

Marin Verona, Bolintin Vale

3) Fie ABC un triunghi ale cărui laturi a, b, c verifică relaţiile:
$a + b - c = 2$ şi $2ab - c^2 = 4$. Arătaţi că triunghiul ABC este echilateral.

Păun Ion, Ogrezeni

4) Fie triunghiul ABC cu AB=9 cm şi un punct M ϵ [AB] astfel încât AM=6 cm. Se duc MN ∥ BC (N ϵ [AC]) şi MP ∥ AC (P ϵ [BC]). Să se afle valoarea raportului dintre aria patrulaterului MPCN şi aria triunghiului ABC.

Dumitru Preoteasa, Giurgiu

Olimpiada de matematică
Etapa locală, 22 februarie 2014
Clasa a VIII-a

Toate subiectele sunt obligatorii. Timp efectiv de lucru: 3 ore
Fiecare subiect se punctează cu note de la 10 la 1.

1) Fie mulţimile:
$A=\{3x+1$, unde $x \in \mathbf{R}$ şi $|2x-1|\leq 3\}$
$B=\{1-2x$, unde $x \in \mathbf{R}$ şi $|x+2|\leq 1\}$.
Arătaţi că suma elementelor numere întregi ale mulţimilor A şi B nu este număr prim.

Păun Ion, Ogrezeni

2) Pe planul rombului ABCD, $m(\sphericalangle A)=60^0$, se ridică perpendiculara BM cu $BM=a\sqrt{2}$. Ştiind că triunghiul MAC este echilateral, să se calculeze în funcţie de a:
a) latura rombului ABCD;
b) lungimea segmentului MD;
c) distanţa de la punctual D la planul (MAC).

Radu Stănică, Frăteşti

3) Se consideră numerele reale pozitive m, n, p cu $m<n<p$. Dacă $x \in (m; n)$ şi $y \in (n; p)$, să se arate că $2xy+mn+np>2\sqrt{xy(n+p)(m+n)}$.

Dumitru Preoteasa, Giurgiu

4) Fie ABCD un dreptunghi. Pe planul acestuia, de aceeaşi parte, se duc perpendicularele AM, BN, CP şi DQ astfel încât punctele M, N, P, Q să fie coplanare. Demonstraţi că patrulaterul MNPQ este dreptunghi dacă şi numai dacă una din laturile sale este paralelă cu planul (ABC).

Gazeta Matematică

OLIMPIADA DE MATEMATICA
ETAPA LOCALA – GIURGIU-22.02.2014
CLASA a IX-a

1) Se consideraecuaţia:
$4x^2-4(m-1)^2x-m^4-1=0; m\in\mathbf{R}$.

a) Scrieţi discriminantul ecuaţiei ca un pătrat perfect în **R**.

b) Arătaţi că rădăcinile ecuaţiei sunt numere iraţionale , $\forall m\in\mathbf{Q}$.

Ionel Tudor,Călugăreni

2) Să se rezolve ecuația :

$$\left[\frac{2x+1}{7}\right]+\left[\frac{10x+12}{35}\right]+\left[\frac{10x+19}{35}\right]+\left[\frac{10x+26}{35}\right]+\left[\frac{10x+33}{35}\right]=x+2.$$

unde [a] reprezintă partea întreagă a numărului a.

Ion Staicu , Giurgiu

3) Se consideră triunghiurile $A_1B_1C_1$ și$A_2B_2C_2$ cu ortocentrele H_1 , respectiv H_2 .
Să se arate că :
$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2}=\overrightarrow{H_1H_2}$, dacă și numai dacă punctele A_1 ,B_1 , C_1 ,A_2 ,B_2 , C_2 sunt conciclice , considerând că razele cercurilor circumscrise sunt egale.

Șerban Olteanu , Giurgiu

4) Se consideră punctele coliniare A , B , C astfel încât BC=AC-AB.
Fie O punctul exterior dreptei AB astfel încât OA=10 cm , OC=$\frac{\sqrt{430}}{2}$ cm și OB=2 AB+5.
Dacă AC=15 cm , iar M este mijlocul lui AB , să se exprime vectorul $\overrightarrow{MC}$ în funcție de vectorii $\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OB}$.

Gazeta Matematică

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - GIURGIU-22.02.2014

CLASA a X-a

1) a) Să se arate că $\log_{2014}\frac{2015}{2} > \frac{1}{2014}$

b) Rezolvați în **R** ecuația: $2014^{2014x} + 2014^{-2014x} = 2\cos\frac{x}{2014}$.

George Ionescu , Bolintin Vale

2) Fie mulțimea $A = \left\{x \in \left(\frac{1}{2014\sqrt{2014}}\ ,\ \infty\right) \middle| \left[\frac{4\log_{2014} x+5}{2\log_{2014} x+3}\right] + \left[\frac{1}{2\log_{2014} x+3}\right] = 2\right\}$,

unde [a] reprezintă partea întreagă a numărului real a.
Să se calculeze $\sum_{x\in A} x$.

Petronela Toma , Giurgiu

3) Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$ cu proprietățile $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ și

$|z_1 + z_2 - z_3| = |z_1 - z_2 + z_3| = |-z_1 + z_2 + z_3|$.

Arătați că $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

Șerban Olteanu , Giurgiu

4) Arătați că numărul

$A = 16\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}$ este întreg.

Gazeta Matematică

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ-GIURGIU-22.02.2014
CLASA a XI-a

1) Se consideră șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ cu $x_1 = \frac{3}{2}$ $și\ x_{n+1} = x_n^2 - 3x_n + 4$, $\forall n \geq 1.$

Calculați $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n}(x_k - 1)$.

Șerban Olteanu , Giurgiu

2) Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$, în care $x_1 = \frac{7}{2}$, $x_2 = \frac{13}{4}$ și $x_{n+2} = \frac{3\,x_{n+1} - x_n}{2}$, $\forall n \geq 1.$

a) Arătați că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent și aflați limita lui.

b) Precizați câți termeni ai șirului nu se află în intervalul $(2{,}96875\ ;3{,}03125)$

Gazeta Matematică

3) Fie determinantul

$$d_4 = \begin{vmatrix} 5 & 8 & 16 & 32 \\ 8 & 17 & 32 & 64 \\ 16 & 32 & 65 & 128 \\ 32 & 64 & 128 & 257 \end{vmatrix} .$$

Să se determine $n \in N^*$, dacă $d_4 = p_n p_{n+6}$, unde p_n

este al n-lea număr prim.

Paul Băiatu , Giurgiu

4) Se consideră matricea

$$M(x)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} & 0 \\ \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ unde } x \in (-1\ ,1) .$$

a) Arătați că $M(x)M(y) = M\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$,$\forall x \in (-1\ ,1)$

b) Calculați $M^{2014}\left(arccos\left[\frac{\pi}{2}\right]\right)$, unde [a] este partea întreagă a numărului a.

c) Calculați $\lim_{n\to\infty}\left(detM\left(\frac{1}{2014}\right) + \frac{1}{\sqrt{n^2+2014}}\right)^{2014n}$

Mădălina Mocanu , Giurgiu

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ-GIURGIU-22.02.2014
CLASA a XII-a

1) Pe mulțimea **R** , considerăm legea de compoziție

$x \circ y = xy - 2013x - 2013y + 2013 \cdot 2014\ ,\forall x, y \in \mathbf{R}$

a) Să se arate că $x \circ x \geq 2013\ ,\forall x \in \mathbf{R}$

b) Calculați $x \circ x \circ x \circ \ldots \circ x$, unde x apare de n ori, $n \in \mathbf{N}^*$

c) Să se rezolve în **R** ecuația $x \circ x \circ x = 2014.$

Monica Coadă , Giurgiu

2) Fie $(M,\cdot)$ un monoid cu elementul neutru e și U(M) mulțimea elementelor inversabilev ale lui M.
Se consideră $a, b \in M$ astfel încât $a^2 = e$ *și* $(ab)^2 = b^4\ , b \in U(M)$.

a) Determinați cel mai mic număr $k \in \boldsymbol{N}^*$, astfel încât $b^k = e$.

b) Calculați b^{2014}.

George Ionescu, Bolintin Vale

3) Să se calculeze :

$$\int \frac{x^{10069} + x^{2013}}{x^{12084} + 1} dx,\ x \in \mathbf{R}\ .$$

Paul Băiatu , Giurgiu

4) Fie funcția $f : [1, e] \to R\ , f(x) = \frac{2}{x^2 + x} \cdot \ln \frac{x}{x+1}$ și F o primitivă a lui f astfel încât $F(1) = ln^2 2$. Dacă G este o primitivă a primitivei lui f , arătați că

$$\int_1^e G(x)\, dx \geq \int_1^e x\, F(x) dx\ .$$

Stelian Piscan , Giurgiu