

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**  
**FAZA LOCALĂ - JUDEȚUL ALBA**  
**14.II.2014**  
**CLASA a V-a**

I. Calculați:

a)  $3 \cdot \left[ 5^{3^2} : 5^{2^3} + (3^4 - 2^4 \cdot 5)^{2015} + 8^7 : 16^5 \right]$ .

b) Câtul dintre pătratul lui  $2^5$  și dublul lui  $2^5$ .

c)  $2^8 \cdot 2^9 \cdot 2^{10} \cdot \dots \cdot 2^{31} - (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{467})$ .

II. Împărțind numărul natural  $a$  la numărul natural  $b$  se obține câtul 14 și restul 18. Dacă diferența dintre numerele  $a$  și  $a-3b$  este egală cu 135, arătați că numărul  $2a$  este pătrat perfect.

III. Să se determine numerele naturale  $x$  astfel încât mulțimile  $A=\{2x, 6x+4\}$  și  $B=\{2x-1, 2x+1, 5x+6\}$  să aibă un singur element comun.

IV. Pe o tablă de șah sunt scrise toate numerele de la 1 la 100. Andrei și Bogdan șterg pe rând, începând cu Andrei, câte un număr la întâmplare, cu condiția ca numărul șters să nu fie multiplu al lui 2 sau 5. Pierde copilul care este obligat să șteargă primul un astfel de număr. Cine câștigă?

Notă:

- Timp de lucru 3 ore
- Toate subiectele sunt obligatorii
- Fiecare subiect valorează 7 puncte

## BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

### CL. a V-a

- I. a)  $3 \cdot \left[ 5 + (81 - 80)^{2015} + 2^{21} : 2^{20} \right] =$  1p  
12 1p
- b)  $(2^5)^2 : (2 \cdot 2^5) =$  1p  
16 1p
- c)  $S_1 = 2^8 \cdot 2^9 \cdot 2^{10} \cdot \dots \cdot 2^{31} = 2^{\frac{31 \cdot 32}{2} - \frac{7 \cdot 8}{2}} = 2^{468}$  1p  
 $S_2 = 2^{468} - 1$  1p  
 $S = S_1 - S_2 = 1$  1p
- II.  $a : b = 14 \text{ rest } 18 \Rightarrow a = 14 \cdot b + 18$  2p  
 $a - (a - 3b) = 135$  1p  
 $b = 135, a = 648$  2p  
 $2a = 1296 = 36^2$  2p
- III.  $2x = 2x - 1 \Rightarrow x \notin \mathbb{N}$  5p  
 $2x = 2x + 1 \Rightarrow x \notin \mathbb{N}$   
...  
 $6x + 4 = 5x + 6 \Rightarrow x = 2$  2p
- IV. de la 1 la 100 există 50 nr.  $:2$ , 20 nr.  $:5$ , 10 nr.  $:10$  3p  
Numere care nu trebuie șterse sunt:  $50 + 20 - 10 = 60$  1p  
Numere care pot fi șterse:  $100 - 60 = 40$  1p  
Dacă Andrei începe, al 40-lea nr. va fi șters de Bogdan și al 41-lea de Andrei. Deci Andrei pierde și Bogdan câștigă. 2p

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**  
**FAZA LOCALĂ - JUDEȚUL ALBA**  
**14.II.2014**  
**CLASA a VI-a**

I. a) Rezolvați în  $\mathbb{N}$  ecuația:

$$\overline{0,(1x)} + \overline{0,(2x)} + \overline{0,(3x)} + \dots + \overline{0,(9x)} = \frac{53}{11}.$$

b) Rezolvați în mulțimea numerelor raționale pozitive ecuația:

$$\frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{3} + \frac{x+3}{4} + \frac{x+4}{5} + \frac{x+5}{6} + \frac{x+6}{7} = 6.$$

II. a) Determinați mulțimea:

$$A = \{2a + 3b \mid a, b \in \mathbb{N}, [a, b] = 96 \text{ și } a \cdot b = 768\}.$$

b) Fie numărul  $N = \overline{abcdab}$ . Arătați că dacă  $7 \cdot \overline{ab} = \overline{cd}$  atunci  $N : 1189$ .

III. Se consideră punctele  $A_1, A_2, \dots, A_n$  coliniare, în această ordine, astfel încât  $A_1A_2 = 1 \text{ cm}$ ,  $A_2A_3 = 2 \text{ cm}$ ,  $\dots$ ,  $A_{n-1}A_n = n-1 \text{ cm}$ ,  $n$  fiind un nr. natural,  $n > 1$ .

a) Calculați lungimea segmentului  $[A_1A_{24}]$ .

b) Să se determine nr. natural  $n$  astfel încât lungimea segmentului  $[A_7A_n]$  să fie  $279 \text{ cm}$ .

c) Determinați distanța dintre mijloacele segmentelor  $[A_1A_4]$  și  $[A_{21}A_{24}]$ .

IV. Fie punctele coliniare  $A, O, D$ , unde  $O \in (AD)$  și unghiurile  $\angle AOB$  și  $\angle BOC$  adiacente, iar semidreapta  $(OC$  este interioară  $\angle BOD$ . Dacă

$$m(\angle BOC) = 5 \cdot m(\angle AOB), \quad m(\angle BOC) = \frac{5}{3} \cdot m(\angle COD) \quad \text{și} \quad [OM \text{ este bisectoarea } \angle AOC$$

iar  $Q$  punct interior  $\angle BOD$  astfel încât  $m(\angle MOQ) = 90^\circ$ , se cere:

a)  $m(\angle AOB)$ ,  $m(\angle BOC)$ ,  $m(\angle COD)$ .

b) să se arate că  $[OQ$  este bisectoarea  $\angle COD$ .

Notă:

- Timp de lucru 3 ore
- Toate subiectele sunt obligatorii
- Fiecare subiect valorează 7 puncte

# BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

## CL. a VI-a

- I. a)  $\frac{\overline{1x}}{99} + \frac{\overline{2x}}{99} + \frac{\overline{3x}}{99} + \dots + \frac{\overline{9x}}{99} = \frac{53}{11}$  1p
- $\frac{9x + 450}{99} = \frac{53}{11}$  2p
- $x = 3$  0,5p
- b)  $\frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \frac{x}{3} + \frac{2}{3} + \dots + \frac{x}{7} + \frac{6}{7} = 6$  1p
- $x \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{7} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{7}$  2p
- $x = 1$  0,5p
- II. a)  $(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b; (a, b) = 8$  1p
- $a = 8x, b = 8y, (x, y) = 1 \Rightarrow xy = 12$  1p
- $(x, y) \in \{(1, 12), (3, 4), (4, 3), (12, 1)\} \Rightarrow (a, b) \in \{(8, 96), (24, 32), (32, 24), (96, 8)\}$  1p
- $A = \{136, 144, 216, 304\}$  1p
- b)  $N = \overline{ab0000} + \overline{cd00} + \overline{ab} = 10001 \cdot \overline{ab} + 100 \cdot \overline{cd} \Rightarrow N = 10701 \cdot \overline{ab}$  2p
- $N = 9 \cdot 1189 \cdot \overline{ab} \Rightarrow N : 1189$  1p
- III. a)  $A_1 A_{24} = A_1 A_2 + A_2 A_3 + \dots + A_{23} A_{24} = 1 + 2 + 3 + \dots + 23 = 276$  2p
- b)  $A_7 A_8 + A_8 A_9 + \dots + A_{n-1} A_n = 279 \Rightarrow 7 + 8 + \dots + n - 1 = 279$
- $\frac{(n-1)n}{2} = 300 \Rightarrow (n-1)n = 600 \Rightarrow n = 25$  2p
- c) Fie  $M$  mij.  $[A_1 A_4]$ ,  $N$  mij.  $[A_{21} A_{24}] \Rightarrow MA_4 = 3, A_{21} N = 33$
- $MN = MA_4 + A_4 A_{21} + A_{21} N = 240cm$  3p
- IV. desen 1p
- a)  $A, O, D$  coliniare  $\Rightarrow m(\angle AOD) = 180^\circ; m(\angle COD) = 3 \cdot m(\angle AOB)$  1p
- $m(\angle AOB) + m(\angle BOC) + m(\angle COD) = 180^\circ \Rightarrow m(\angle AOB) = 20^\circ, m(\angle BOC) = 100^\circ, m(\angle COD) = 60^\circ$  2p
- b)  $m(\angle AOC) = 120^\circ; [OM \text{ bisect. } \angle AOC \Rightarrow m(\angle AOM) = m(\angle MOC) = 60^\circ$  1p
- $\left. \begin{array}{l} m(\angle COQ) = m(\angle MOQ) - m(\angle MOC) = 30^\circ \\ m(\angle QOD) = m(\angle COD) - m(\angle COQ) = 30^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow [OQ \text{ bisect. } \angle COD$  2p

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**  
**FAZA LOCALĂ - JUDEȚUL ALBA**  
**14.II.2014**  
**CLASA a VII-a**

I. Rezolvați în  $\mathbb{Q}$  ecuațiile:

a)  $|2x - 3| - 4 = 5$

b)  $x \cdot 3^{2014} = (3^{2014} - 1) : \left( 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2013}} \right)$

II. a) Arătați că  $\sqrt{2001 + 2 + 4 + 6 + \dots + 4000} \in \mathbb{N}$

b) Determinați  $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$  știind că:

$$\frac{1}{\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = 99.$$

III. În paralelogramul  $ABCD$  alegem  $M \in [DC]$  astfel încât  $CM = 2DM$  și  $N \in [BC]$ , astfel încât  $BN = 2NC$ . Știind că aria triunghiului  $CMN$  este egală cu  $16\text{cm}^2$ , aflați aria paralelogramului  $ABCD$ .

IV. Fie triunghiul  $ABC$ ,  $D, E \in (BC)$  astfel încât  $AB^2 = BD \cdot BC$  și  $\angle CAE \equiv \angle ABC$ .  
Arătați că:

a)  $AC^2 = CE \cdot CB$

b) triunghiul  $ADE$  este isoscel.

Notă:

- Timp de lucru 3 ore
- Toate subiectele sunt obligatorii
- Fiecare subiect valorează 7 puncte

# BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

## CL. a VII-a

- I. a)  $|2x-3|=9 \Rightarrow x \in \{-3,6\}$  2p
- $|2x-3|=-9$  nu are soluție 1p
- b)  $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{3^{2013}}=\frac{3^{2014}-1}{2 \cdot 3^{2013}} \Rightarrow x \cdot 3^{2014}=2 \cdot 3^{2013} \Rightarrow x=\frac{2}{3}$  4p
- II. a)  $\sqrt{2001+2 \cdot \frac{2000 \cdot 2001}{2}}=\sqrt{2001^2}=2001$  3p
- b)  $\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\dots+\sqrt{n}-\sqrt{n-1}=99 \Rightarrow n=10000$  4p
- III. Desen 1p
- Fie  $Q$  mij.  $[BN]$ ;  $BN=2NC \Rightarrow BQ=QN=NC$  1p
- $MN$  mediană în  $\triangle CMQ \Rightarrow A_{MNC}=A_{MNQ}=16cm^2 \Rightarrow A_{CMQ}=32cm^2$  2p
- $MQ \parallel DB \Rightarrow \frac{CM}{CD}=\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{A_{CMQ}}{A_{CDB}}=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9} \Rightarrow A_{CDB}=72cm^2 \Rightarrow A_{ABCD}=144cm^2$  3p
- IV. a) Desen 1p
- $\triangle ABC \approx \triangle EAC(U.U) \Rightarrow \frac{AC}{CE}=\frac{BC}{AC} \Rightarrow AC^2=CE \cdot BC$  2p
- b)  $\triangle ABC \approx \triangle EAC \Rightarrow \angle BAC \equiv \angle AEC$  1p
- $\triangle ABC \approx \triangle DBA(U.U.) \Rightarrow \angle BAC \equiv \angle BDA$  1p
- $\Rightarrow \angle AEC \equiv \angle BDA \Rightarrow \angle ADE \equiv \angle AED \Rightarrow \triangle ADE$  este isoscel 2p

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**  
**FAZA LOCALĂ - JUDEȚUL ALBA**  
**14.II.2014**  
**CLASA a VIII-a**

- I. a) Să se calculeze:  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
- b) Dacă  $x = \sqrt{10-\sqrt{19}} - \sqrt{10+\sqrt{19}}$ , să se calculeze  $x^2$  și  $(x+\sqrt{2})^{2002}$ .
- II. Dacă  $x \in [-3,5]$  și  $y \in [-1,6]$  arătați că:
- $a = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy - 22x - 22y + 121} + \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 8x + 8y + 16}$  este număr natural.
- III. Fie  $ABCA^1B^1C^1$  o prismă triunghiulară regulată dreaptă, cu  $AB = 4\sqrt{3}cm$ ,  $AA^1 = 12cm$  și  $P$  un punct pe  $CC^1$ .
- a) Determinați poziția punctului  $P$  pe  $CC^1$  știind că aria triunghiului  $PAB$  este  $12\sqrt{6}cm^2$ .
- b) Determinați măsura unghiului dintre dreapta  $PM$  și planul  $(ABB^1)$ , unde  $M$  este mijlocul laturii  $AB$ .]
- IV. Fie  $VABC$  o piramidă regulată dreaptă de vârf  $V$ , în care  $AB=6cm$ ,  $m(\angle VAB) = 72^\circ$ . O furnică aflată în  $A$  se plimbă pe toate fețele laterale pe drumul cel mai scurt și revine în  $A$ , tăind muchiile laterale  $(VB)$  și  $(VC)$  în punctele  $M$ , respectiv  $N$ .
- a) Arătați că  $BC \parallel (AMN)$
- b) Arătați că raportul dintre lungimea înălțimii piramidei (duse din  $V$ ) și lungimea drumului parcurs de furnică este egal cu  $tg30^\circ$ .

Notă:

- Timp de lucru 3 ore
- Toate subiectele sunt obligatorii
- Fiecare subiect valorează 7 puncte

# BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

## CL. a VIII-a

I. a)  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2^2 - (2+\sqrt{2})} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2^2 - 2} = 2$  3p

b)  $x^2 = 10 - \sqrt{19} - 2\sqrt{(10 - \sqrt{19})(10 + \sqrt{19})} + 10 + \sqrt{19}$  1p

$x^2 = 2 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$  1,5p

$\Rightarrow (x + \sqrt{2})^{2002} = \begin{cases} 0 \\ 2^{2003} \end{cases}$  1,5p

II.  $a = \sqrt{(x+y-11)^2} + \sqrt{(x+y+4)^2} = |x+y-11| + |x+y+4|$  3p

$x+y+4 \geq 0, x+y-11 \leq 0 \Rightarrow a = -x-y+11+x+y+4 = 15 \in \mathbb{N}$  4p

III. Desen 1p

a)  $\left. \begin{array}{l} PC \perp (ABC) \\ CM \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow PM \perp AB$  1p

$A_{PAB} = \frac{PM \cdot AB}{2} \Rightarrow PM = 6\sqrt{2}cm$  1p

$CM = 6cm \Rightarrow PC = 6cm$  1p

b)  $MN \parallel C^1C; PE = pr_{(ABB^1)} PM \Rightarrow PE \perp (ABB^1)$  1p

$m(\angle(PM; (ABB^1))) = m(\angle PME) = 45^\circ$  2p

IV. Figură spațiu+desfășurare 2p

a)  $\left. \begin{array}{l} BC \parallel MN \\ MN \subset (AMN) \\ BC \not\subset (AMN) \end{array} \right\} \Rightarrow BC \parallel (AMN)$  1p

b)  $\Delta VAB \approx \Delta ABM (U.U.) \Rightarrow \frac{VA}{AB} = \frac{AB}{BM} = \frac{VB}{AM} \Rightarrow VA = 3 + 3\sqrt{5}$  2p

$AO = 2\sqrt{3}cm, O \text{ centrul bazei } ABC, VO = \sqrt{3}(3 + \sqrt{5})cm$

$L_{drum} = AM + MN + NA^1 = 3(3 + \sqrt{5}) \Rightarrow \frac{VO}{L_{drum}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = tg 30^\circ$  2p



**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**  
**FAZA LOCALĂ, JUDEȚUL ALBA**  
**13.02.2014**

**CLASA a IX-a**

**Problema 1.**

a) Arătați că  $x^3 - 3x + 2 \geq 0, (\forall)x > 0$ .

b) Arătați că pentru orice numere reale  $a, b, c \in [0,1]$ , este adevărată inegalitatea:

$$\frac{a}{b+c^3+7} + \frac{b}{c+a^3+7} + \frac{c}{a+b^3+7} \leq \frac{1}{3}.$$

**Problema 2.**

Să se determine numerele reale strict pozitive  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , cu  $a_1 = 1$ , pentru care este adevărată egalitatea:

$$\frac{3}{a_1 \cdot a_2} + \frac{5}{a_2 \cdot a_3} + \frac{7}{a_3 \cdot a_4} + \dots + \frac{2n+1}{a_n \cdot a_{n+1}} = 1 - \frac{1}{a_{n+1}}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*.$$

**Problema 3.**

Fie paralelogramul  $ABCD$  și punctele  $M \in (AD), N \in (BC), P \in (MN)$ , astfel încât  $\frac{BN}{BC} + 2 \cdot \frac{AM}{AD} = 2$  și  $\frac{PN}{PM} = 2$ . Arătați că punctele  $R, P, D$  sunt coliniare.

**Problema 4.**

În interiorul unui triunghi ascuțitunghic  $ABC$  se consideră punctul  $M$ . Bisectoarele interioare ale unghiurilor  $\angle BMC, \angle AMC, \angle AMB$  intersectează laturile  $BC, AC$ , respectiv  $AB$  în punctele  $D, E$ , respectiv  $F$ .

a) Arătați că dreptele  $AD, BE$  și  $CF$  sunt concurente într-un punct  $P$ .

b) Arătați că  $\frac{FA}{PB} + \frac{EA}{PC} = \frac{PA}{PF}$ .

c) Arătați că  $\frac{FB}{PA} + \frac{EC}{PB} + \frac{FE}{PC} \geq 6$ . Cine este punctul  $M$  în cazul în care avem egalitate?

NOTĂ : Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

**BAREM OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**  
**FAZA LOCALĂ, JUDEȚUL ALBA**  
**13.02.2014**  
**BAREM DE CORECTARE**  
**CLASA a IX-a**

**Problema 1.**

a) Arătați că  $x^3 - 3x + 2 \geq 0, (\forall) x > 0$ .

b) Arătați că pentru orice numere reale  $a, b, c \in [0, 1]$ , este adevărată inegalitatea:

$$\frac{a}{b+c^2+7} + \frac{b}{c+a^2+7} + \frac{c}{a+b^2+7} \leq \frac{1}{3}.$$

**Soluție și barem:**

a)  $(x-1)(x^2+x-2) \geq 0$  .....2p

$(x-1)^2(x+2) \geq 0, (\forall) x > 0$  .....1p

b)  $\frac{a}{b+c^2+7} \leq \frac{a}{b+3c+5} = \frac{a}{b+3c+2+3} \leq \frac{a}{b+3c+3+2b} = \frac{a}{3(a+b+c)}$  .....2p

$\frac{b}{c+a^2+7} \leq \frac{b}{3(a+b+c)}; \frac{c}{a+b^2+7} \leq \frac{c}{3(a+b+c)}$  .....1p

$\frac{a}{b+c^2+7} + \frac{b}{c+a^2+7} + \frac{c}{a+b^2+7} \leq \frac{a+b+c}{3(a+b+c)} = \frac{1}{3}$  .....1p

**Problema 2.**

Să se determine numerele reale strict pozitive  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , cu  $a_1 = 1$ , pentru care este adevărată egalitatea:

$$\frac{3}{a_1 \cdot a_2} + \frac{5}{a_2 \cdot a_3} + \frac{7}{a_3 \cdot a_4} + \dots + \frac{2n+1}{a_n \cdot a_{n+1}} = 1 - \frac{1}{a_{n+1}}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*.$$

**Soluție și barem:**

$n = 1 \Rightarrow \frac{3}{a_1} = 1 - \frac{1}{a_2} \Rightarrow a_2 = 4$  .....1p

$n = 2 \Rightarrow \frac{3}{4} + \frac{5}{4a_3} = 1 - \frac{1}{a_3} \Rightarrow a_3 = 9$  .....1p

Presupunem  $a_k = k^2$  și demonstrăm că  $a_{k+1} = (k+1)^2$  .....2p

Din ipoteză avem  $1 - \frac{1}{a_k} + \frac{2k+1}{a_k \cdot a_{k+1}} = 1 - \frac{1}{a_{k+1}} \Rightarrow \frac{2k+1}{a_k \cdot a_{k+1}} + \frac{1}{a_{k+1}} = \frac{1}{a_k}$  .....1p

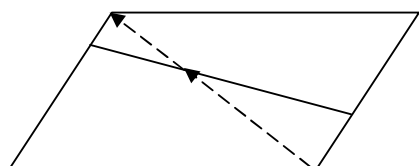
$a_{k+1} = a_k + 2k + 1 = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$  .....1p

În concluzie  $a_n = n^2$ , pentru orice  $n$  număr natural nenul. ....1p

**Problema 3.**

Fie paralelogramul  $ABCD$  și punctele  $M \in (AD), N \in (BC), P \in (MN)$ , astfel încât  $\frac{BN}{BC} + 2 \cdot \frac{AM}{AD} = 2$  și  $\frac{NP}{PM} = 2$ . Arătați că punctele  $B, P, D$  sunt coliniare.

**Soluție și barem:**



a) Notăm  $\frac{BN}{BC} = k$  și  $\frac{AM}{AD} = m$  și avem  $\overrightarrow{BN} = k\overrightarrow{BC}$ ,

$\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AD} = m\overrightarrow{BC}$  .....2p

$\overrightarrow{BP} = k\overrightarrow{BC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{NM}$  .....1p

$\overrightarrow{BP} = k\overrightarrow{BC} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM})$  .....1p

$\overrightarrow{BP} = k\overrightarrow{BC} + \frac{2}{3}(-k\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + m\overrightarrow{BC})$  .....1p

$\overrightarrow{BP} = \frac{k+2m}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA})$

.....1p

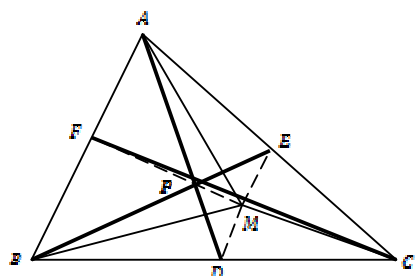
$\overrightarrow{BP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$ , de unde rezultă că punctele  $B, P, D$  sunt coliniare .....1p

#### Problema 4.

În interiorul unui triunghi ascuțitunghic  $ABC$  se consideră punctul  $M$ . Bisectoarele interioare ale unghiurilor  $\angle BMC$ ,  $\angle AMC$ ,  $\angle AMB$  intersectează laturile  $BC, AC$ , respectiv  $AB$  în punctele  $D, E$ , respectiv  $F$ .

- Arătați că dreptele  $AD, BE$  și  $CF$  sunt concurente într-un punct  $P$ .
- Arătați că  $\frac{FA}{FB} + \frac{EA}{EC} = \frac{PA}{PE}$ .
- Arătați că  $\frac{PA}{PD} + \frac{PB}{PE} + \frac{PC}{PF} \geq 6$ . Cine este punctul  $M$  în cazul în care avem egalitate?

**Soluție și barem:**



a) Din teorema bisectoarei, rezultă  $\frac{DB}{DC} = \frac{MB}{MC} \cdot \frac{EC}{EA} = \frac{MC}{MA}$  și  $\frac{FA}{FB} = \frac{MA}{MB}$ .

$\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = \frac{MB}{MC} \cdot \frac{MC}{MA} \cdot \frac{MA}{MB} = 1$ ; rezultă  $AD \cap BE \cap CF = \{P\}$ .

b)  $\triangle ABD$  și transversala  $F - P - C \Rightarrow \frac{FA}{FB} \cdot \frac{BC}{CD} \cdot \frac{PD}{PA} = 1 \Rightarrow$

$$\frac{FA}{FB} = \frac{PA}{PD} \cdot \frac{CD}{BC} \quad \dots\dots\dots 1p$$

$\triangle ADC$  și transversala  $E - P - B \Rightarrow \frac{EA}{EC} \cdot \frac{BC}{BD} \cdot \frac{PE}{PA} = 1 \Rightarrow \frac{EA}{EC} = \frac{PA}{PE} \cdot \frac{BD}{BC}$ . Rezultă în

continuare:  $\frac{FA}{FB} + \frac{EA}{EC} = \frac{PA}{PD} \left( \frac{CD}{BC} + \frac{BD}{BC} \right) = \frac{PA}{PD}$ .

c)  $\frac{PA}{PD} = \frac{MA}{MB} + \frac{MA}{MC}$ ;  $\frac{PB}{PE} = \frac{MB}{MC} + \frac{MB}{MA}$ ;  $\frac{PC}{PF} = \frac{MC}{MA} + \frac{MC}{MB}$ .

$$\frac{PA}{PD} + \frac{PB}{PE} + \frac{PC}{PF} = \left( \frac{MA}{MB} + \frac{MA}{MC} \right) + \left( \frac{MB}{MC} + \frac{MC}{MA} \right) + \left( \frac{MC}{MA} + \frac{MA}{MC} \right) \geq 2 + 2 + 2 = 6.$$

Avem egalitate dacă și numai dacă  $MA = MD = MC$ , adică  $M$  este centrul cercului circumscris triunghiului  $ABC$ .

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
FAZA LOCALĂ, JUDEȚUL ALBA  
13.02.2014**

**Clasa a X-a**

1. Fie  $M \subset \mathbb{C}$  o mulțime care satisface proprietățile:

- i)  $0 \in M$ ;
- ii)  $x \in M \Rightarrow (\cos x + i \sin x) \in M$ ;
- iii)  $(\cos 2x + i \sin 2x) \in M \Rightarrow x \in M$ .

Să se arate că:

- a)  $M$  conține cel puțin 3 numere întregi;
- b)  $M$  conține o infinitate de numere iraționale;
- c)  $M$  conține o infinitate de numere complexe nereale;

2. Să se determine  $x, y \in \mathbb{Q}$  care verifică  $\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = -11x + 2y$  și  $\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = 2x + 11y$ .

3. Să se rezolve în  $\mathbb{R}$  ecuația:  $\log_a [x] = [\log_a x]$ ,  $a \in \mathbb{N}, a \geq 2$ .

4. Fie  $a > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$  și sistemul 
$$\begin{cases} a^{x_1} + a^{x_2} + \dots + a^{x_{n-1}} = n - a^2 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} = n - 1 \end{cases}.$$

Arătați că dacă sistemul are soluție, atunci  $a \leq 1$ .

**Notă:** Toate subiectele sunt obligatorii.  
Timpul de lucru este de 3 ore.

**BAREM OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**  
**FAZA LOCALĂ, JUDEȚUL ALBA**  
**13.02.2014**  
**Clasa a X-a**

1. Fie  $M \subset \mathbb{C}$  o mulțime care satisface proprietățile:

- i)  $0 \in M$ ;
- ii)  $x \in M \Rightarrow (\cos x + i \sin x) \in M$ ;
- iii)  $(\cos 2x + i \sin 2x) \in M \Rightarrow x \in M$ .

Să se arate că:

- a)  $M$  conține cel puțin 3 numere întregi;
- b)  $M$  conține o infinitate de numere iraționale;
- c)  $M$  conține o infinitate de numere complexe nereale;

**Barem:** a)  $\cos 0 + i \sin 0 \in M \Rightarrow 1 \in M$  ... 1p

$1 = \cos 2\pi + i \sin 2\pi \in M \Rightarrow \pi \in M \Rightarrow \cos \pi + i \sin \pi \in M \Rightarrow -1 \in M$  ... 2p

b)  $1 = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi \in M, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k\pi \in M, \forall k \in \mathbb{Z}$  ... 1p

c)  $\cos \pi + i \sin \pi \in M \Rightarrow \frac{\pi}{2} \in M \Rightarrow \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \in M$  ... 1p

Demonstrația prin inducție:  $\cos \frac{\pi}{2^n} + i \sin \frac{\pi}{2^n} \in M, \forall n \in \mathbb{N}^*$  ... 2p

2. Să se determine  $x, y \in \mathbb{Q}$  care verifică  $\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = -11x + 2y$  și  $\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = 2x + 11y$ .

GM

**Barem :**

Se consideră  $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$ . Observăm că  $z^{-1} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} i$  ... 1p

$z^{-2} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{2xy}{x^2 + y^2} i$  ... 1p

Se înmulțește cu  $(-i)$  a doua ecuație și se adună cu prima, după care se rescrie ecuația obținută folosind pe  $z$ .

$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{2xy}{x^2 + y^2} i = -11x + 2y - 2xi - 11yi$  ... 2p

$z^{-1} = -(11 + 2i)z \Rightarrow z^3 = -\frac{1}{11 + 2i} \Rightarrow z^3 = \left(\frac{1 - 2i}{5}\right)^3$  ... 2p

Soluții raționale se obțin numai pentru  $z = \frac{1 - 2i}{5}, x = \frac{1}{5}, y = -\frac{2}{5}$  ... 1p

3. Să se rezolve în  $\mathbb{R}$  ecuația:  $\log_a[x] = [\log_a x], a \in \mathbb{N}, a \geq 2$ .

**Barem:** Condiții de existență:  $x \in [1, +\infty)$  ... 1p

$\log_a^{[x]} = [\log_a^x] = k \Rightarrow k \in \mathbb{N}$  ... 1p

$\begin{cases} [x] = a^k \\ k \leq \log_a^x \leq k + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^k \leq x < a^{k+1} \\ a^k \leq x < a^{k+1} \end{cases} \dots 2p$

$a^k + 1 \leq a^{k+1}$  pentru  $a \geq 2$  și  $k \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [a^k, a^{k+1})$  ... 3p

4. Fie  $a > 0, n \in \mathbb{N}, n \geq 3$  și sistemul  $\begin{cases} a^{x_1} + a^{x_2} + \dots + a^{x_{n-1}} = n - a^2 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} = n - 1 \end{cases}$ .

Arătați că dacă sistemul are soluție, atunci  $a \leq 1$ .

**Barem :**

$a^{x_1} + a^{x_2} + \dots + a^{x_n} \geq (n - 1)^{n-1} \sqrt[n-1]{a^{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}} = (n - 1)^{n-1} \sqrt[n-1]{a^{n-1}} = (n - 1)a \dots 4p$

$n - a^2 \geq (n - 1)a, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \dots 2p$

$a \in [0, 1) \dots 1p$

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
FAZA LOCALĂ, JUDEȚUL ALBA  
13.02.2014**

**CLASA a XI-a**

**Problema 1.**

Considerăm matricea  $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

a) Arătați că  $A^2 - 4A + 3I_2 = O_2$ .

b) Arătați că există două șiruri de numere reale  $(x_n)_{n \geq 1}$  și  $(y_n)_{n \geq 1}$  astfel încât să avem  $A^n = x_n \cdot A + y_n \cdot I_2, (\forall) n \geq 1$  și apoi calculați limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2x_n}{3^n + 1} \right)^{3^n}.$$

**Problema 2.**

Se dă matricea  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Notăm  $tr(A) = a + d$ .

a) Arătați că  $A^2 - tr(A) \cdot A + det(A) \cdot I_2 = O_2$ .

b) Dacă există  $n \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $A^n = O_2$ , arătați că  $A^2 = O_2$ .

c) Dacă există  $n \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $A^n = O_2$ , arătați că  $det(I_2 + AXA) = 1$ , pentru orice matrice  $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

**Problema 3.**

Considerăm șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$ , definit prin  $\begin{cases} x_1 \in (0,1) \\ x_{n+1} = x_n \cdot x_n^{\frac{4}{3}}, (\forall) n \geq 1 \end{cases}$ .

a) Arătați că șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  este convergent și calculați limita sa.

b) Arătați că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n} \cdot x_n = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ .

c) Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x_n^3)^n$ .

**Problema 4.**

Fie  $(x_n)_{n \geq 1}$  un șir de numere reale cu proprietatea că

$$\sqrt{n \cdot x_n + n + 1} - \sqrt{n \cdot x_n + 1} \leq \frac{\sqrt{n}}{2} \leq \sqrt{n \cdot x_n + n} - \sqrt{n \cdot x_n} \quad (\forall) n \geq 1.$$

Calculați limita șirului  $(x_n)_{n \geq 1}$ .

NOTĂ : Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

**BAREM OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**  
**FAZA LOCALĂ, JUDEȚUL ALBA**  
**13.02.2014**  
**BAREM DE CORECTARE**  
**CLASA a XI-a**

**Problema 1.**

Considerăm matricea  $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

a) Arătați că  $A^2 - 4A + 3I_2 = O_2$ .

b) Arătați că există două șiruri de numere reale  $(x_n)_{n \geq 1}$  și  $(y_n)_{n \geq 1}$  astfel încât să avem  $A^n = x_n \cdot A + y_n \cdot I_2, (\forall) n \geq 1$  și apoi calculați limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2x_n}{3^n + 1} \right)^{3^n}.$$

**Soluție și barem:**

a)  $A^2 = \begin{pmatrix} 17 & 16 \\ -8 & -7 \end{pmatrix}$  .....1p

Finalizare .....1p

b)  $x_1 = 1, y_1 = 0; x_2 = 4, y_2 = 3$  .....1p

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = (x_n \cdot A + y_n \cdot I_2) \cdot A = x_n \cdot A^2 + y_n \cdot A = (4x_n + y_n) \cdot A - 3x_n \cdot I_2,$$

de unde obținem  $x_{n+1} = 4x_n + y_n$  și  $y_{n+1} = -3x_n, (\forall) n \geq 1$ .....1p

$$x_{n+1} - 4x_n + 3x_{n-1} = 0, (\forall) n \geq 2 \Rightarrow x_n = \frac{3^n - 1}{2} \text{ și } y_n = \frac{3 - 3^n}{2}, (\forall) n \geq 1$$
.....2p

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3^n - 1}{3^n + 1} \right)^{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{2}{3^n + 1} \right)^{3^n} = e^{-2} \dots\dots\dots 1p$$

**Problema 2.**

Se dă matricea  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Notăm  $tr(A) = a + d$ .

a) Arătați că  $A^2 - tr(A) \cdot A + det(A) \cdot I_2 = O_2$ .

b) Dacă există  $n \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $A^n = O_2$ , arătați că  $A^2 = O_2$ .

c) Dacă există  $n \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $A^n = O_2$ , arătați că  $det(I_2 + AXA) = 1$ , pentru orice matrice  $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

**Soluție și barem:**

a)  $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}$  .....1p

Finalizare .....1p

b)  $det(A) = 0 \Rightarrow A^2 = tA$ , unde  $t = tr(A)$  .....1p

$$A^n = t^{n-1}A, (\forall) n \geq 1$$
 .....1p

$t = 0$  sau  $A = O_2$ , de unde rezultă  $A^2 = O_2$  .....1p

c)  $det(I_2 + AXA) = det(I_2 + XA^2) = det(I_2) = 1, (\forall) X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  .....2p

**Problema 3.**

Considerăm șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$ , definit prin  $\begin{cases} x_1 \in (0,1) \\ x_{n+1} = x_n - x_n^{\frac{4}{3}}, (\forall) n \geq 1 \end{cases}$ .

a) Arătați că șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  este convergent și calculați limita sa.

b) Arătați că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n} \cdot x_n = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ .

c) Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x_n^3)^n$ .

**Soluție și barem:**

a)  $x_n \in (0,1)$  și  $x_n$  strict descrescător, deci  $x_n$  este convergent .....2p

Din relația de recurență, obținem că  $x_n$  are limita egală cu 0 .....1p

$$\begin{aligned} \text{b) } l &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot x_n^3 = \frac{n+1-n}{1/x_{n+1}^3 - 1/x_n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^3 \cdot x_{n+1}^3}{x_n^3 - x_{n+1}^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^3 \cdot x_{n+1}^3}{x_n^3 - x_n^3(1-x_n^3)^3} \dots\dots\dots 2\text{p} \\ l &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^3(1-x_n^3)^3}{1-(1-x_n^3)^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-x_n^3)^3}{3-3x_n^3+x_n^6} = \frac{1}{3} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n} \cdot x_n = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \dots\dots\dots 1\text{p} \\ \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} (1+x_n^3)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ (1+x_n^3)^{1/x_n^3} \right]^{n \cdot x_n^3} = e^{1/3} = \sqrt[3]{e} \dots\dots\dots 1\text{p} \end{aligned}$$

**Problema 4.**

Fie  $(x_n)_{n \geq 1}$  un șir de numere reale cu proprietatea că

$$\sqrt{n \cdot x_n + n + 1} - \sqrt{n \cdot x_n + 1} \leq \frac{\sqrt{n}}{2} \leq \sqrt{n \cdot x_n + n} - \sqrt{n \cdot x_n} \quad (\forall) n \geq 1.$$

Calculați limita șirului  $(x_n)_{n \geq 1}$ .

**Soluție și barem:**

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x_n+\frac{1}{n}} - \sqrt{x_n+\frac{1}{n}} &\leq \frac{1}{2} \leq \sqrt{1+x_n} - \sqrt{x_n}, (\forall) n \geq 1 \dots\dots\dots 1\text{p} \\ \sqrt{1+x_n+\frac{1}{n}} &\leq \frac{1}{2} + \sqrt{x_n+\frac{1}{n}} \Rightarrow \frac{9}{16} \leq x_n + \frac{1}{n}, (\forall) n \geq 1 \dots\dots\dots 2\text{p} \\ \frac{1}{2} + \sqrt{x_n} &\leq \sqrt{1+x_n} \Rightarrow x_n \leq \frac{9}{16}, (\forall) n \geq 1 \dots\dots\dots 2\text{p} \\ 0 \leq \frac{9}{16} - x_n &\leq \frac{1}{n}, \text{ deci șirul } x_n \text{ este convergent către } \frac{9}{16} \dots\dots\dots 2\text{p} \end{aligned}$$



**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
FAZA LOCALĂ, JUDEȚUL ALBA  
13.02.2014**

**CLASA a XII-a**

**Problema 1.**

Pe mulțimea  $G = (0, \infty)$  definim legea de compoziție:

$$x \circ y = 2^{\frac{n}{\sqrt{(\log_2 x)^n + (\log_2 y)^n - 2^n}}}, (\forall) x, y \in G, \text{ unde } n \geq 3 \text{ este natural impar.}$$

- a) Arătați că  $(G, \circ)$  este grup abelian.
- b) Arătați că funcția  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (\log_2 x)^n - 2^n$  este izomorfism de la grupul  $(G, \circ)$  la grupul  $(\mathbb{R}, +)$ .
- c) Rezolvați ecuația  $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{2014 \text{ ori}} = 4$ , în grupul  $(G, \circ)$ .

**Problema 2.**

Fie  $(G, \cdot)$  un grup și  $f, g$  două endomorfisme ale grupului  $G$ ,  $g$  injectivă. Arătați că grupul  $G$  este comutativ în fiecare din următoarele situații:

- a)  $f(x) = g(x^2), (\forall) x \in G$ .
- b)  $f(x) = g(x^{-1}), (\forall) x \in G$ .

**Problema 3.**

Considerăm funcțiile  $f, g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  cu proprietatea că  $\frac{f(x)}{x}$  este o primitivă pentru  $g$  și  $\frac{g(x)}{x}$  este o primitivă pentru  $f$ .

- a) Arătați că  $f'(x) + g'(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot (f(x) + g(x)), (\forall) x > 0$ .
- b) Determinați funcțiile  $f$  și  $g$ .

**Problema 4.**

Determinați funcțiile continue  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  și constanta reală  $L$  știind că:

- a) există  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot f(x) = L$ ;
- b)  $\int_x^{2x} f(t) dt = 1, (\forall) x > 0$ .

NOTĂ : Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

**BAREM OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**  
**FAZA LOCALĂ, JUDEȚUL ALBA**  
**13.02.2014**  
**BAREM DE CORECTARE**  
**CLASA a XII-a**

**Problema 1.**

Pe mulțimea  $G = (0, \infty)$  definim legea de compoziție:

$$x \circ y = 2^{\frac{n}{\sqrt{(\log_2 x)^n + (\log_2 y)^n} - 2^n}}, (\forall) x, y \in G, \text{ unde } n \geq 3 \text{ este natural impar.}$$

- a) Arătați că  $(G, \circ)$  este grup abelian.  
 b) Arătați că funcția  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (\log_2 x)^n - 2^n$  este izomorfism de la grupul  $(G, \circ)$  la grupul  $(\mathbb{R}, +)$ .  
 c) Rezolvați ecuația  $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{2014 \text{ ori}} = 4$ , în grupul  $(G, \circ)$ .

**Soluție și barem:**

a) Asociativitate,  $(x \circ y) \circ z = 2^{\frac{n}{\sqrt{(\log_2 x)^n + (\log_2 y)^n} + (\log_2 z)^n - 2^n}} \dots\dots\dots 1p$

Elementul neutru  $e = 4 \in G \dots\dots\dots 1p$

Simetricul elementului  $x \in G, x' = 2^{\frac{n}{\sqrt{2 \cdot 2^n - (\log_2 x)^n}}} \in G \dots\dots\dots 1p$

b)  $f$  bijectivă  $\dots\dots\dots 1p$

$f(x \circ y) = f(x) + f(y), (\forall) x, y \in G \dots\dots\dots 1p$

c) Egalitatea  $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{2014 \text{ ori}} = 4$  este echivalentă cu  $2014 \cdot f(x) = f(4) = 0 \dots\dots\dots 1p$

$f(x) = 0 \Rightarrow (\log_2 x)^n - 2^n = 0$ , de unde  $x = 4. \dots\dots\dots 1p$

**Problema 2.**

Fie  $(G, \cdot)$  un grup și  $f, g$  două endomorfisme ale grupului  $G$ ,  $g$  injectivă. Arătați că grupul  $G$  este comutativ în fiecare din următoarele situații:

a)  $f(x) = g(x^2), (\forall) x \in G$ .

b)  $f(x) = g(x^{-1}), (\forall) x \in G$ .

**Soluție și barem:**

a)  $g((xy)^2) = f(xy) = f(x)f(y) = g(x^2)g(y^2) = g(x^2y^2) \dots\dots\dots 2p$

$g$  injectivă  $\Rightarrow (xy)^2 = x^2y^2, (\forall) x, y \in G \dots\dots\dots 1p$

$xyxy = xxyy \Rightarrow yx = xy, (\forall) x, y \in G \Rightarrow G$  este comutativ.  $\dots\dots\dots 1p$

b)  $g((xy)^{-1}) = f(xy) = f(x)f(y) = g(x^{-1})g(y^{-1}) = g(x^{-1}y^{-1}) \dots\dots\dots 1p$

$g$  injectivă  $\Rightarrow (xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}, (\forall) x, y \in G \dots\dots\dots 1p$

$(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1} = y^{-1}x^{-1} = (yx)^{-1} \Rightarrow yx = xy, (\forall) x, y \in G \Rightarrow G$  este comutativ.  $\dots\dots\dots 1p$

**Problema 3.**

Considerăm funcțiile  $f, g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  cu proprietatea că  $\frac{f(x)}{x}$  este o primitivă pentru  $g$  și  $\frac{g(x)}{x}$  este o primitivă pentru  $f$ .

a) Arătați că  $f'(x) + g'(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot (f(x) + g(x)), (\forall) x > 0$ .

b) Determinați funcțiile  $f$  și  $g$ .

**Soluție și barem:**

a)  $\begin{cases} \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2} = g(x) \\ \frac{g'(x) \cdot x - g(x)}{x^2} = f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) \cdot x = f(x) + x^2 \cdot g(x) \\ g'(x) \cdot x = g(x) + x^2 \cdot f(x) \end{cases}, (\forall) x > 0 \dots\dots\dots 2p$

Adunând relațiile de mai sus, obținem egalitatea cerută  $\dots\dots\dots 1p$

b) Notăm  $h = f + g$  și din punctul a) avem  $h'(x) - \left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot h(x) = 0, (\forall) x > 0$ ,  
 ceea ce este echivalent cu  $\left(h(x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2} - \ln x}\right)' = 0, (\forall) x > 0$ .....1p

Rezultă  $f(x) + g(x) = a \cdot x \cdot e^{\frac{x^2}{2}}, (\forall) x > 0$ , unde  $a \in \mathbb{R}$  .....1p

Analog se obține  $f(x) - g(x) = b \cdot x \cdot e^{\frac{-x^2}{2}}, (\forall) x > 0$ , unde  $b \in \mathbb{R}$  .....1p

Obținem  $f(x) = \frac{x}{2} \left(a \cdot e^{\frac{x^2}{2}} + b \cdot e^{\frac{-x^2}{2}}\right), g(x) = \frac{x}{2} \left(a \cdot e^{\frac{x^2}{2}} - b \cdot e^{\frac{-x^2}{2}}\right), a, b \in \mathbb{R}$  1p

#### Problema 4.

Determinați funcțiile continue  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  și constanta reală  $L$  știind că:

a) există  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot f(x) = L$ ;

$$b) \int_x^{2x} f(t) dt = 1, (\forall) x > 0.$$

**Soluție și barem:**

Din b) rezultă  $F(2x) - F(x) = 1, (\forall) x > 0$ , unde  $F$  este o primitivă a lui  $f$  .....2p

$2f(2x) - f(x) = 0$ , de unde  $f(x) = \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}\right), (\forall) x > 0$  .....2p

Prin inducție matematică obținem  $f(x) = \frac{1}{2^n} f\left(\frac{x}{2^n}\right), (\forall) n \in \mathbb{N}^*$  .....1p

$L = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{2^n} \cdot f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} x \cdot f(x) = xf(x), (\forall) x > 0$ , de unde  
 $f(x) = \frac{L}{x}, (\forall) x > 0$ . .....1p

Prin înlocuire în b) rezultă  $L(\ln 2x - \ln x) = 1, (\forall) x > 0$ , de unde  $L = \frac{1}{\ln 2}$  și

funcția  $f(x) = \frac{1}{x \ln 2}, (\forall) x > 0$ . .....1p