



## OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 23.02.2014

Clasa a VIII-a

### Barem de corectare și notare

**Subiect I** a) Arătați că  $\sqrt{\frac{7 \cdot 36^n + 9 \cdot 6^n + 2}{7 \cdot 6^n + 2}} \in R/Q$ , oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}$ .

b) Aflați numerele naturale  $a$  și  $b$  astfel încât :

$$A = \frac{6}{\sqrt{a+11} - \sqrt{8a} + \sqrt{b+12} - \sqrt{12b}} \text{ să fie număr natural.}$$

### Soluție

a) Descompunerea numărătorului  $(7 \cdot 6^n + 2)(6^n + 1) \dots\dots\dots 1p$

Se obține  $\sqrt{6^n + 1} \dots\dots\dots 1p$

$u(6^n + 1) = 7$ , pentru  $n > 0$  și  $u(6^n + 1) = 2$ , pentru  $n = 0 \dots\dots\dots 1p$

$6^n + 1$  nu este pătrat perfect, finalizare. .... 1p

b) A este număr natural dacă numitorul divide pe 6

$$a + 11 - \sqrt{8a} = (\sqrt{a} - \sqrt{2})^2 + 3^2$$

$$b + 12 - \sqrt{12b} = (\sqrt{b} - \sqrt{3})^2 + 3^2 \dots\dots\dots 1p$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{2})^2 + 3^2 \geq 3^2 \Rightarrow \sqrt{(\sqrt{a} - \sqrt{2})^2 + 3^2} \geq 3$$

$$(\sqrt{b} - \sqrt{3})^2 + 3^2 \geq 3^2 \Rightarrow \sqrt{(\sqrt{b} - \sqrt{3})^2 + 3^2} \geq 3 \dots\dots\dots 1p$$

Numitorul este mai mare sau egal cu 6 și (din prima condiție) divizor al lui 6.

Singura soluție este ca numitorul să fie 6  $\Rightarrow a=2$  și  $b=3 \dots\dots\dots 1p$

### Subiect II Demonstrați inegalitățile

a)  $\frac{x+y}{2} > \sqrt{xy}$ , oricare ar fi  $x$  și  $y$  numere reale pozitive distincte

b)  $\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{5}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1009}{\sqrt{1008}} > 2014$

### Soluție

a)  $\frac{x+y}{2} > \sqrt{xy} \Rightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}_+, x \neq y \dots\dots\dots 3p$

b) aplicând a)  $\frac{2+1}{2} > \sqrt{2} \Rightarrow \frac{2+1}{\sqrt{2}} > 2 \dots\dots\dots 3p$

$$\frac{1008+1}{\sqrt{1008}} > 2 \Rightarrow S > 2 \cdot 1007 = 2014 \dots\dots\dots 1p$$



**Subiect III** În cubul  $ABCD A'B'C'D'$  punctul  $M \in (DD')$  astfel încât  $[DD'] \equiv [D'M]$ ,  $MA' \cap (ABC) = \{S\}$  și  $MC' \cap (ABC) = \{P\}$ .

a) Demonstrați că punctele  $S$ ,  $B$  și  $P$  sunt coliniare.

b) Dacă  $(MA'B) \cap (ADC') = d$ , calculați măsura unghiului dreptelor  $AD'$  și  $d$ .

*Vasile Angheloni, profesor, Medgidia*

### Soluție

a)  $(ABC) \cap (MDA) = AD \Rightarrow S \in AD$ ; analog  $P \in DC$  ..... 1p

$\Delta MDP \xRightarrow{rec.l.t.m.} CC'$  este linie mijlocie  $\Rightarrow CP = CD \Rightarrow m(\sphericalangle CBP) = 45^0$  (2); analog  $m(\sphericalangle ABS) = 45^0$  ..... 1p

$m(\sphericalangle SBP) = m(\sphericalangle ABS) + m(\sphericalangle CBP) + m(\sphericalangle ABC) = 180^0 \Rightarrow B \in SP$  ..... 1p

b) Fie  $AB' \cap A'B = \{O\}$ ; punctele  $S$ ,  $O$  și  $C'$  sunt coliniare  $\Rightarrow (MA'B) \cap (ADC'B') = SC' = d$  ..... 2p

$AD' \parallel BC' \Rightarrow m[\sphericalangle (AD', SC')] = m(\sphericalangle SC'B)$  ..... 1p

$\Delta BC'P$  este echilateral  $\Rightarrow m(\sphericalangle SC'B) = 30^0$  ..... 1p

**Subiect IV** Fie  $SABCD$  o piramidă patrulateră regulată,  $AM \perp SB$ ,  $M \in SB$ ,  $BN \perp SC$ ,  $N \in SC$ ,  $CP \perp SD$ ,  $P \in SD$ ,  $DQ \perp SA$ ,  $Q \in SA$  și  $R$  simetricul punctului  $N$  față de dreapta  $AC$ .

a) Demonstrați că punctele  $B$ ,  $R$ ,  $Q$  și  $D$  sunt coplanare.

b) Calculați măsura unghiului dintre dreptele  $MP$  și  $RQ$ .

*Gazeta Matematică, E.14350*

### Soluție

a) Notăm  $\{O\} = AC \cap BD$  și  $\{F\} = NR \cap AC$ ; din  $DQ = BN \xRightarrow{c.u.} AQ = CF$  ..... 1p

construind  $QE \perp AC$ ,  $E \in AC \Rightarrow AE = CF$ ,  $OE = OF$  și  $EQ = NF$  ..... 1p

$QE, NF \subset (SAC)$ ,  $QE \perp AC$  și  $NF \perp AC \Rightarrow QE \parallel NF$ , dar  $EQ = NF = FR$ , deci  $EQFR$  este paralelogram .... 1p

din  $\{O\} = AC \cap BD$  și  $\{O\} = RQ \cap BD \Rightarrow B, D, R$  și  $Q$  sunt coplanare, ..... 1p

b) Din  $BM = DP$  și  $\Delta SDB$  este isoscel  $\Rightarrow PM \parallel DB$  ..... 1p

$m(\sphericalangle MP, QR) = m(\sphericalangle BD, QR)$ ; din  $BD \perp (ASC)$  și  $OQ \subset (ASC) \Rightarrow BD \perp OQ$  ..... 1p

deci  $m(\sphericalangle MP, QR) = m(\sphericalangle BD, QR) = 90^0$  ..... 1p