



**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 23.02.2014 -**

CLASA A V-A

**Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 2 ore.**

1. Determinați numerele \overline{ab} știind că împărțind numărul $\overline{ab5}$ la numărul \overline{ba} obținem câtul 5 și restul 25.
2. a) Determinați toate perechile de numere naturale (n, p) care verifică egalitatea $(n+1)(n+2p) = 1+2+3+4$;
b) Determinați câte perechi de numere naturale (n, p) care verifică egalitatea $(n+1)(n+2p) = 1+2+3+\dots+2014$.
3. Se consideră numărul $n = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{99\dots99}_{2014 \text{ cifre}} + 2014$.
 - a) Arătați că numărul n este divizibil cu 10;
 - b) Determinați câtul și restul împărțirii numărului n la 111.
4. Se consideră mulțimea A care are ca elemente numere naturale scrise cu cinci cifre diferite care aparțin mulțimii $\{1, 3, 5, 7, 9\}$.
 - a) Determinați câte numere din mulțimea A au prima cifră 1 și ultima cifră 3;
 - b) Determinați câte elemente conține mulțimea A ;
 - c) Calculați suma tuturor elementelor din mulțimea A .





**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
- ETAPA PE SECTOR, 23.02.2014 -**

**CLASA A V-A
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE**

**Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.**

Subiectul 1. Determinați numerele \overline{ab} știind că împărțind numărul $\overline{ab5}$ la numărul \overline{ba} obținem câtul 5 și restul 25.

Prof. Cristian Mangra, București

Detalii rezolvare	Barem asociat
Din teorema împărțirii cu rest avem $\overline{ab5} = 5 \cdot \overline{ba} + 25$, cu $\overline{ba} > 25$.	2 p
Folosind scrierea în baza 10 obținem $19 \cdot a = 8 \cdot b + 4$.	2 p
Deoarece numărul din membrul drept se divide cu 4 deducem că $a \in \{4, 8\}$.	2 p
Pentru $a = 4$, obținem $b = 9$ și numărul căutat este 49. Pentru $a = 8$ nu avem soluție.	1 p

Subiectul 2.

a) Determinați toate perechile de numere naturale (n, p) care verifică egalitatea

$$(n+1)(n+2p) = 1+2+3+4;$$

b) Determinați câte perechi de numere naturale (n, p) care verifică egalitatea

$$(n+1)(n+2p) = 1+2+3+\dots+2014.$$

Prof. Ion Cicu, București

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Avem $(n+1)(n+2p) = 10$, deci $n+1$ este divizor al lui 10, adică $n+1 \in \{1, 2, 5, 10\}$	1p
Obținem $n \in \{0, 1, 4, 9\}$. Convin perechile $n = 0, p = 5$ și $n = 1, p = 2$.	2p
b) Răspuns: 0 perechi	
Avem $1+2+3+\dots+2014 = 1007 \cdot 2015$ care este număr impar.	1p
Numerele $n+1$ și $n+2p$ au parități diferite deoarece 1 este impar, iar $2p$ este par. Prin urmare, numărul $(n+1)(n+2p)$ este par.	2p
În concluzie $(n+1)(n+2p) \neq 1+2+3+\dots+2014$, oricare ar fi numerele naturale n și p .	1p

Subiectul 3. Se consideră numărul $n = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{99\dots99}_{2014 \text{ cifre}} + 2014$.

- a) Arătați că numărul n este divizibil cu 10;
 b) Determinați câtul și restul împărțirii numărului n la 111.

Prof. Aurica Pîrvescu, Botoșani

Detalii rezolvare	Barem asociat
<p>a) Numărul n are 2014 termeni formați numai cu cifra 9 . Vom scrie termenul 2014 ca o sumă formată din 2014 de 1.</p> <p>Avem</p> $n = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{99\dots99}_{2014 \text{ cifre}} + \underbrace{1+1+1+\dots+1}_{2014 \text{ termeni}} = (9+1) + (99+1) + (999+1) + \dots + (99\dots99+1)$ <p>sau</p> $n = 10 + 100 + 1000 + \dots + \underbrace{100\dots00}_{2014 \text{ cifre}} = \underbrace{11\dots110}_{2014 \text{ cifre}}.$ <p>Cum ultima cifră este 0 , numărul este divizibil cu 10</p>	3p
<p>b) Vom scrie $n = 111 \cdot 10^{2012} + 111 \cdot 10^{2009} + \dots + 111 \cdot 10^2 + 10 =$</p> $= 111 \cdot (1 \cdot 10^{2012} + 1 \cdot 10^{2009} + \dots + 1 \cdot 10^2) + 10$ <p>Câtul este $\underbrace{100100\dots100}_{671 \text{ grupe}}$, iar restul este 10.</p>	2 p 2 p

Subiectul 4. Se consideră mulțimea A care are ca elemente numere naturale scrise cu cinci cifre diferite care aparțin mulțimii $\{1, 3, 5, 7, 9\}$.

- a) Determinați câte numere din mulțimea A au prima cifră 1 și ultima cifră 3;
 b) Determinați câte elemente conține mulțimea A ;
 c) Calculați suma tuturor elementelor din mulțimea A .

Prof. Marius Perianu, Slatina

Detalii rezolvare	Barem asociat
<p>a) Numerele au forma $\overline{abc3}$. Cifra a poate lua 3 valori, cifra b poate lua 2 valori, iar cifra c o valoare. Sunt $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ numere</p>	2 p
<p>b) Numerele au forma \overline{abcde}. Cifra a poate lua 5 valori, cifra b poate lua 4 valori, cifra c poate lua 3 valori, cifra d poate lua 2 valori, iar cifra e o valoare. Sunt $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ de numere.</p>	3 p
<p>c) Fiecare cifră apare, pe fiecare poziție, de 24 de ori și atunci suma numerelor are forma</p> $S = 24 \cdot (1+3+5+7+9) \cdot 10^4 + 24 \cdot (1+3+5+7+9) \cdot 10^3 + 24 \cdot (1+3+5+7+9) \cdot 10^2 + 24 \cdot (1+3+5+7+9) \cdot 10 + 24 \cdot (1+3+5+7+9) = 24 \cdot 25 \cdot 11111 = 6666600$	2 p

