INSPECTORATUL ŞCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREŞTI
MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE



**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**
**– ETAPA PE SECTOR, 23.02.2014 -**

**CLASA A VI-A**

**Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 2 ore.**

**1.** Arătaţi că există un singur număr prim de trei cifre cu produsul cifrelor egal cu 70.

**2.** Se consideră unghiurile proprii $\sphericalangle AOB, \sphericalangle BOC, \sphericalangle COD, \sphericalangle DOA$ cu interioarele disjuncte, formate în jurul punctului $O$. Unghiul $\sphericalangle AOB$ este suplementul unghiului $\sphericalangle AOC$ precum şi al unghiului $\sphericalangle BOD$. Măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle BOC$ sunt exprimate, în grade, prin două numere naturale care au cel mai mare divizor comun egal cu 30.
Determinaţi măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOB, \sphericalangle BOC, \sphericalangle COD, \sphericalangle DOA$.

**3.** Dacă numerele naturale $x, y, z$ verifică egalitatea $67x+52y=15z$, arătaţi că numărul $(x+y)(y+z)(z+x)$ se divide cu $2010$.

**4.** Notăm cu $S$ mulţimea numerelor de cinci cifre distincte formate cu elementele mulţimii $\{1, 2, 3, 7, 8\}$.
**a)** Dacă $p$ este un element oarecare al mulţimii $S$, arătaţi că numerele $5p, 3p$ şi $7p$ **nu** sunt elemente ale mulţimii $S$.
**b)** Determinaţi toate elementele $m\in S$ care au proprietatea că $4m\in S$.

Problema 4 a fost selectată din nr. 1/2014 al ***Gazetei Matematice***- Seria B, publicaţie lunară pentru tineret, fondată în anul 1895, editată de Societatea de Ştiinţe Matematice din România

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**
**– ETAPA PE SECTOR, 23.02.2014 -**

**CLASA A VI-A**
**SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE**

**Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.**

**Subiectul 1.** Arătaţi că există un singur număr prim de trei cifre cu produsul cifrelor egal cu 70.

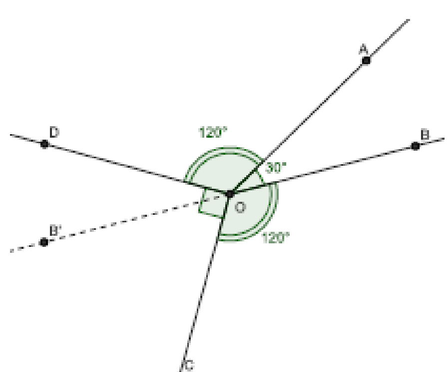
***

| **Detalii rezolvare** | **Barem asociat** |
|---|---|
| Descompunerea în factori a lui $70$ este $2\cdot5\cdot7$ şi putem forma numerele<br>$725, 752, 527, 572, 275, 257$ | **2 p** |
| Numerele care au ultima cifră 5 nu sunt prime; se divid cu 5, iar numerele care au ultima cifră 2 nu sunt prime pentru că se divid cu 2. | **2 p** |
| $527=17\cdot31$, aşadar nu este număr prim | **2 p** |
| 257 este număr prim, se verifică prin împărţiri succesive la 7, 11, 13 şi 17. | **1 p** |

**Subiectul 2.** Se consideră unghiurile proprii $\sphericalangle AOB, \sphericalangle BOC, \sphericalangle COD, \sphericalangle DOA$ cu interioarele disjuncte, formate în jurul punctului $O$. Măsura suplementului unghiului $\sphericalangle AOB$ este egală cu măsura unghiului $\sphericalangle AOC$ precum şi cu măsura unghiului $\sphericalangle BOD$. Măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle BOC$ sunt exprimate, în grade, prin două numere naturale care au cel mai mare divizor comun egal cu 30.

Determinaţi măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOB, \sphericalangle BOC, \sphericalangle COD, \sphericalangle DOA$.

*Prof. Victor Nicolae, Petre Simion, Bucureşti*

| **Detalii rezolvare** | **Barem asociat** |
|---|---|
|   Notăm $m(\sphericalangle AOB)=a$ şi $m(\sphericalangle BOC)=b$. Cum $(a,b)=30$, rezultă că $a=30x, b=30y$ $x,y\in\mathbb{N}^*$, $(x,y)=1$ . | **1 p** |
| Dacă $\sphericalangle AOC$ are ca suplement $\sphericalangle AOB$, atunci $m(\sphericalangle AOC)+a=180^0$ .<br>Dar $m(\sphericalangle AOC)=a+b$ şi atunci $2a+b=180$ sau $60x+30y=180$, rezultă $2x+y=6$. | **2 p** |

| | |
|---|---|
| Cum $y$ este număr par nenul, implică $y \in \{2, 4\}$.<br>Dacă $y = 2$, atunci $x = 2$ şi numerele nu sunt prime între ele.<br>Dacă $y = 4$, atunci $x = 1$. Rezultă $a = 30^0, b = 120^0$. | **2 p** |
| Avem $m(\sphericalangle AOB) = 30^0$, $m(\sphericalangle BOC) = 120^0$.<br>Din $m(\sphericalangle BOD) + a = 180^0 \Rightarrow m(\sphericalangle BOD) = 150^0 \Rightarrow m(\sphericalangle AOD) = 120^0$.<br>Din suma măsurilor unghiurilor în jurul unui punct rezultă $m(\sphericalangle COD) = 90^0$. | **2 p** |

**Subiectul 3.** Dacă numerele naturale $x, y, z$ verifică egalitatea $67x + 52y = 15z$, arătați că numărul $(x+y)(y+z)(z+x)$ se divide cu $2010$.

*Nicolae Ivăşchescu, Craiova*

| **Detalii rezolvare** | **Barem asociat** |
|---|---|
| $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$.<br>Vom arăta că numărul $(x+y)(y+z)(z+x)$ se divide cu 2, cu 15 şi cu 67. | **1 p** |
| Relația dată se mai scrie $67x + 67y = 15y + 15z$ sau $67(x+y) = 15(y+z)$ | **2 p** |
| Cum 15 este relativ prim cu 67, rezultă 15 divide pe $x+y$, aşadar<br>$15 \mid (x+y)(y+z)(z+x)$ (1)<br>Cum 67 este relativ prim cu 15 rezultă 67 divide pe $y+z$, aşadar $67 \mid (x+y)(y+z)(z+x)$<br>(2) | **2 p** |
| Dacă $x, y, z$ sunt numere naturale atunci cel puțin două au aceeaşi paritate şi prin urmare, cel puțin una din sumele $x+y$, $y+z$, $z+x$ se divide cu 2, de unde<br>$2 \mid (x+y)(y+z)(z+x)$ (3) | **1 p** |
| Din (1), (2) şi (3) rezultă $2 \cdot 15 \cdot 67 \mid (x+y)(y+z)(z+x)$, adică $2010 \mid (x+y)(y+z)(z+x)$ | **1 p** |



**Subiectul 4.** Notăm cu $S$ mulțimea numerelor de cinci cifre distincte formate cu elementele mulțimii {1, 2, 3, 7, 8}.

**a)** Dacă $p$ este un element oarecare al mulțimii $S$, arătați că numerele $5p, 3p$ şi $7p$ **nu** sunt elemente ale mulțimii $S$.

**b)** Determinați toate elementele $m \in S$ care au proprietatea că $4m \in S$.

*Prof.Gheorghe Rotariu, Dorohoi, Botoşani*

| **Detalii rezolvare** | **Barem asociat** |
|---|---|
| **a)** Dacă $p \in S$, atunci $U(5p) \in \{0, 5\}$. Deci $5p \notin S$ | **1 p** |
| Dacă $p \in S$, $p = 9k + 3$, $k \in \mathbb{N}$. Dar $3p$ este multiplu de 9, deci $3p \notin S$. | **1 p** |
| Dacă $p \in S$, $p = \overline{abcde}$ şi $7p \in S$, atunci $a = 1$ şi $b = 2$. Se obține că $7 \cdot \overline{12cde} \notin S$. | **1 p** |
| **b)** Dacă $m \in S$, $m = \overline{abcde}$ şi $4m \in S$, atunci $a \in \{1, 2\}$. | **2 p** |
| Dacă $a = 1$, atunci $b \in \{7, 8\}$ şi se obține $m = 17832$. | **1p** |
| Dacă $a = 2$, atunci $b = 1$ şi se obține $m = 21783$. | **1p** |