

**OLIMPIADA DE MATEMATICA
FAZA LOCALĂ****15.02.2014****Clasa a VII – a**

1. (3 p) a) Arătați că : $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, pentru orice număr natural n .

(4 p) b) Stabiliți dacă numărul a este rațional , unde :

$$a = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{4}}{\sqrt{20}} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{\sqrt{30}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{6}}{\sqrt{42}} + \dots + \frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{\sqrt{9900}} .$$

2. (7 p) Să se determine două numere naturale a căror sumă este 29 , știind că unul are 2 divizori , celălalt exact 5 divizori , iar suma tuturor divizorilor (celor 7) este 45 .

3. Fie paralelogramul $ABCD$ cu $DB \perp BC$. Prin punctul C se duce o perpendiculară pe DC , care intersectează diagonala BD în E .

(4 p) a) Demonstrați că $\sphericalangle BEC \equiv \sphericalangle DAB$.

(3 p) b) Dacă $m(\sphericalangle A) = 60^\circ$, arătați că $\frac{BE}{EC} = \frac{CB}{BA}$.

4. (7 p) În pătratul $ABCD$ se consideră M și N mijloacele laturilor $[AD]$ și $[DC]$. Fie $P \in (MB)$ astfel încât $MB = BP$. Dacă $BD = 8 \text{ cm}$, aflați distanța de la B la NP

Notă : Toate subiectele sunt obligatorii,

Timp de lucru : 3 ore

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 p.

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
OLIMPIADA DE MATEMATICA
FAZA LOCALĂ
15.02.2014
Clasa a VII – a

1. a) $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (3 p)

b) $a = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20}} - \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{20}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{30}} - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{30}} + \dots + \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{9900}} - \frac{\sqrt{99}}{\sqrt{9900}}$
 $a = \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}} - \frac{1}{\sqrt{100}}$ (2 p)

$a = \frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \in \mathbb{Q}$ (2 p)

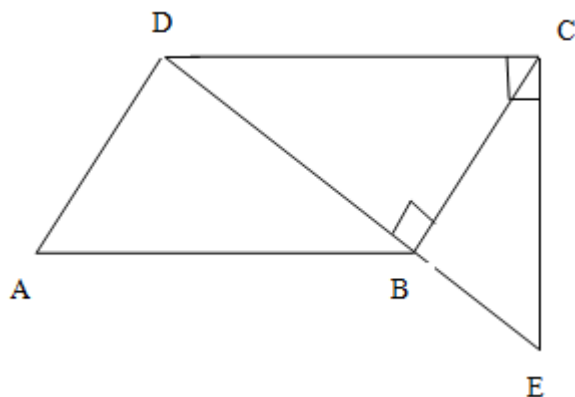
2. a) Fie a, b astfel încât $a + b = 29$. Cum a are 2 divizori, rezultă că $a = p$, unde p număr prim și $\mathcal{D}_a = \{1, p\}$ (2 p)

Numărul b are 5 divizori $\Rightarrow b = q^4$, unde q este număr prim iar $\mathcal{D}_b = \{1, q^1, q^2, q^3, q^4\}$ (2 p)

Suma divizorilor este $1 + p + 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 = 2 + (p + q^4) + q^1 + q^2 + q^3 = 2 + (a + b) + q^1 + q^2 + q^3 = 45 \Rightarrow q^1 + q^2 + q^3 = 45 - 31 = 14$. Rezultă $q(1 + q + q^2) = 14 \Rightarrow q \in \{2, 7\}$ (2 p)

Soluția este $q = 2$, deci $b = 2^4 = 16 \Rightarrow a = 29 - 16 = 13$ (1 p)

3.



(1 p)

a) $ABCD$ paralelogram $\Rightarrow m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle BCD) = 180^\circ$.

Notăm $m(\sphericalangle ABD) = x$ și $m(\sphericalangle BCD) = y \Rightarrow x + 90^\circ + y = 180^\circ \Rightarrow x + y = 90^\circ$. $m(\sphericalangle BCE) = 90^\circ - y = x^\circ$ (2 p)

În $\triangle BCE$, $(\sphericalangle B) = 90^\circ$, $m(\sphericalangle BEC) = y$ și cum $m(\sphericalangle DAB) = m(\sphericalangle BCD) \Rightarrow m(\sphericalangle BEC) = m(\sphericalangle DAB)$ (1 p)

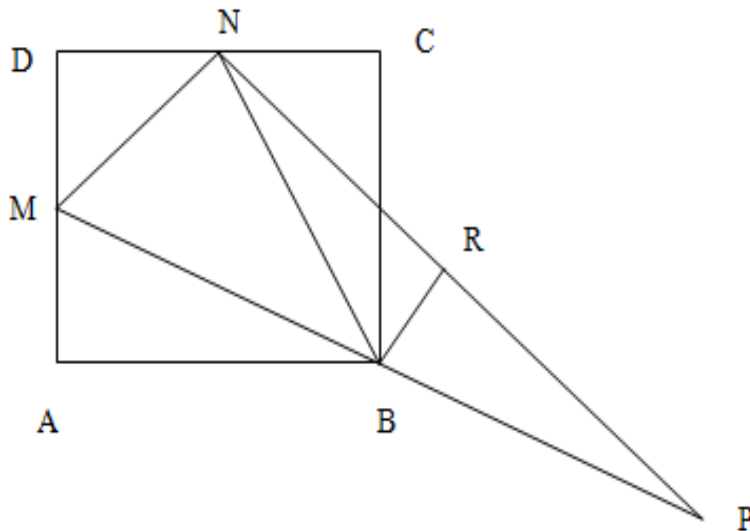
b) $m(\sphericalangle A) = 60^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle ABD) = 30^\circ \Rightarrow \triangle BEC$ dreptunghic în B (1 p)

$$m(\sphericalangle BCE) = 30^\circ \Rightarrow BE = \frac{CE}{2} \Rightarrow \frac{BE}{CE} = \frac{1}{2}.$$

În $\triangle BCD$ $m(\sphericalangle B) = 90^\circ$, $m(\sphericalangle BDC) = 30^\circ \Rightarrow BC = \frac{DC}{2} \Rightarrow \frac{BC}{DC} = \frac{1}{2}$ (1 p)

$[DC] = [BA]$, rezultă $\frac{BE}{EC} = \frac{BC}{BA}$ (1 p)

4.



(1 p)

$$\triangle MAB \equiv \triangle NCB \Rightarrow \begin{cases} BM = BN \\ BN = BP \end{cases} \Rightarrow NB = \frac{MP}{2} \quad (2 \text{ p})$$

$\triangle MNP$ dreptunghic ($\hat{N} = 90^\circ$) $\Rightarrow MN \perp NP$, $BR \perp NP \Rightarrow MN \parallel BR$ (2 p)

B mijlocul lui MP, deci BR este linie mijlocie în $\triangle MNP \Rightarrow BR = \frac{MN}{2} = \frac{AC}{4} = 2 \text{ cm}$

(2 p)