OLIMPIADA DE MATEMATICA

FAZA LOCALĂ

15.02.2014

Clasa a VIII – a

1. (4 p) a) Calculați $\left[(2+\sqrt{3})^{2014}+\frac{1}{(2-\sqrt{3})^{2014}}\right]\cdot\frac{(4-2\cdot\sqrt{3})^{2014}}{2^{2013}}$

   (3 p) b) Determinați numerele raționale $a \text{ și } b$ astfel încât

$$2a\sqrt{2}-b=a+b\sqrt{2}-3 \ .$$

2. (4 p) a) Rezolvați ecuația $|x-1|+|x-2|+\cdots+|x-2013|=2014(x-2014)$.

   (3 p) b) Arătați că $x\sqrt{x}+y\sqrt{y}\geq x\sqrt{y}+y\sqrt{x}$, $\forall\ x,y\in\mathbb{R}_+$

3. (7 p) În cubul $ABCDA'B'C'D'$, M este mijlocul laturii AB , $C'M\cap D'B=\{P\}$. Dacă $BP=4\sqrt{3}$, aflaţi distanţa de la punctul D la diagonala $D'B$.

4. În tetraedrul regulat $ABCD$ se consideră punctul M - mijlocul lui $[AB]$ şi N - mijlocul lui $[AC]$. Dacă muchia tetraedrului este de 8 cm. , determinaţi :

   (3 p) a) Perimetrul patrulaterului BCNM

   (2 p) b) măsura unghiului format de dreapta MN cu AB

   (2 p) c) distanţa de la punctul C la planul (ABD) .

Notă : Toate subiectele sunt obligatorii,
Timp de lucru : 3 ore
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 p.

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
OLIMPIADA DE MATEMATICA
FAZA LOCALĂ
15.02.2014
Clasa a VIII – a

1. a) $\frac{(2+\sqrt{3})^{2014}\cdot(2-\sqrt{3})^{2014}+1}{(2-\sqrt{3})^{2014}}\cdot\frac{(4-2\sqrt{3})^{2014}}{2^{2013}}=\frac{\left(2^2-\sqrt{3}^2\right)^{2014}+1}{(2-\sqrt{3})^{2014}}\cdot\frac{2^{2014}(2-\sqrt{3})^{2014}}{2^{2013}}=$

   $(1^{2014}+1)\cdot 2=4$ (4 p)

   b) $(2a-b)\sqrt{2}=a+b-3$

   $(2a-b)\sqrt{2}\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\ \ iar\ \ a+b-3\in\mathbb{Q}\Rightarrow$

   $\begin{cases}2a-b=0\\ a+b-3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=2\end{cases}$ (3 p)

2. a) Membrul stâng este pozitiv $\Rightarrow$ membrul drept este pozitiv , deci $x-2014\geq 0\Rightarrow x\geq 2014\Rightarrow x-1\geq 0, x-2\geq 0, \dots, x-2013\geq 0\Rightarrow$ renuntând la module se obține

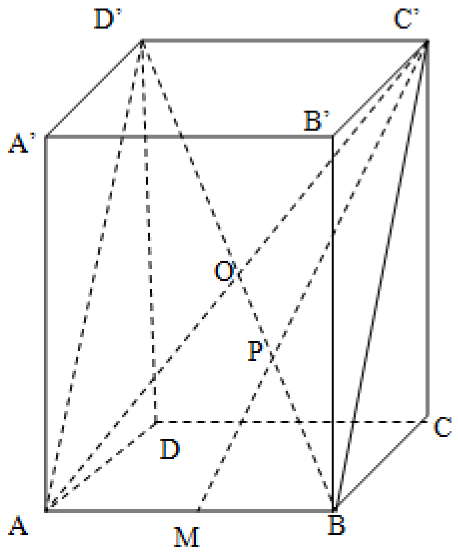
   $x-1+x-2+\cdots+x-2013=2014\cdot(x-2014)\Leftrightarrow 2013x-(1+2+3+\cdots+2013)=2014x-2014^2\Leftrightarrow 2013x-\frac{2013\cdot 2014}{2}=2014x-2014^2\Leftrightarrow x=2014^2-\frac{2013\cdot 2014}{2}\Leftrightarrow x=\frac{2\cdot 2014^2-2013\cdot 2014}{2}=1007\cdot 2015$ (4 p)

   b) $x\sqrt{x}+y\sqrt{y}-x\sqrt{y}-y\sqrt{x}=x\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)-y\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)=$

   $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)(x-y)=\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=$

   $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\geq 0\ pentru\ orice\ x,y\in\mathbb{R}_+$ (3 p)

3. Desen



(1 p)

Unind C' cu $A \Longrightarrow C'A$ diagonală în dreptunghiul $ABC'D'$, cu $AC' \cap BD' = \{O\}$.

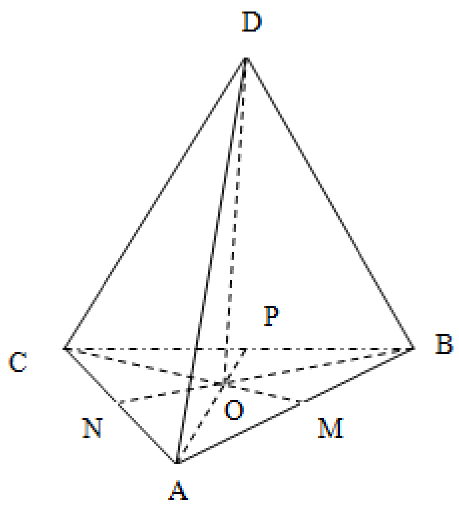
În triunghiul ABC' , $C'M \cap BO = \{P\}$ (2 p)

P este centrul de greutate $\Longrightarrow BP = \frac{2}{3}BO \Longrightarrow \frac{2}{3}\frac{l\sqrt{3}}{2} = BP \Longrightarrow l = \frac{3 \cdot 4\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$\Longrightarrow l = 12$ (muchia cubului) (2 p)

În triunghiul $D'DB$ cu $m(\sphericalangle D) = 90^o$ notăm $(D, BD') = DE$, $DE = \frac{DD' \cdot DB}{D'B} =$ $4\sqrt{6}\ cm$ (2 p)

4. Desen



(1 p)

a) ΔABC , $MN - linie\ mijlocie \Longrightarrow MN \parallel BC$, $MN = \frac{BC}{2} = 4\ cm$

$BCNM - trapez\ isoscel$ $P_{BCNM} = BC + CN + NM + MB = 8\ cm + 3 \cdot 4\ cm =$ $20\ cm$ (2 p)

b) $MN \parallel BC$, $AB\ secantă$ $m(\sphericalangle(MN, AB)) = 60^0$

Fie P mijl. lui $[BC] \Rightarrow AP \perp BC$

Cum $DO \perp (ABC) \Rightarrow DO \perp BC$, resultă $\begin{cases} BC \perp (DPO) \\ AD \subset (DPO) \end{cases} \Rightarrow BC \perp AD.$

Din $MN \parallel BC$ și $AD \perp MN \Rightarrow m(\sphericalangle(MN, AD)) = 90^o$

c) $\begin{cases} AB \perp CM \\ AB \perp DM \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB \perp (CMD) \\ AB \subset (ABD) \end{cases} \Rightarrow (ABD) \perp (CDM)$

Construim $CE \perp DM$, $CE \subset (CDM) \Rightarrow CE \perp (ADB) \Rightarrow d(C, (ABD)) = CE$

În ΔCDM , $DM = \frac{l\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$

Se aplică teorema lui Pitagora și se obține $DO = \frac{8\sqrt{6}}{3}$

$A_{\Delta CDM} = \dfrac{CM \cdot DO}{2} = 16\sqrt{2}$

$A_{\Delta CDM} = \frac{DM \cdot CE}{2} = \frac{4\sqrt{3} \cdot CE}{2} = 2\sqrt{3} \cdot CE$. Se obține $CE = \frac{8\sqrt{6}}{3}$ $d(C, (ABD)) = \frac{8\sqrt{6}}{3}$ cm

(2 p)