Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa locală - 15.02.2014

Clasa a IX-a M_1

Problema 1

Rezolvaţi în R ecuaţia $\left[\frac{4x+4}{4x-5}\right]=\frac{2x-1}{3}$.

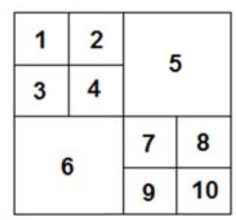
Problema 2

a) Arătaţi că $4x^3+4x^2+2\geq 7x$, $\forall x\in[-2,\infty)$

b) Determinaţi valorile reale ale lui k, pentru care: $a^3+b^3+c^3+a^2+b^2+c^2+\frac{3}{2}\geq k(a+b+c)$, $\forall a,b,c\in[-2,\infty)$.

Problema 3

Să se arate că pentru orice număr natural $n\geq 6$, un pătrat se poate împărţi în exact n pătrate (*nu neapărat de aceeaşi dimensiune – în figura alăturată aveţi un exemplu pentru* $n=10$).



Problema 4

a) Arătaţi că, dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC, atunci, pentru orice punct O din planul triunghiului avem $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$.

b) Determinaţi o relaţie între numerele reale a,b astfel încât punctele $A(1,1)$, $B(a,b)$ şi $C(a+1,b+1)$ să fie vârfurile unui triunghi.

Notă

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală - 15.02.2014

Clasa a IX-a M_2

Problema 1

Arătați că: $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y},(\forall)a,b\in\mathbb{R}$ şi $(\forall)x,y\in\mathbb{R}_+^*$.

Problema 2

La o fabrică de încălțăminte s-au fabricat în luna martie 2013, 540 perechi de pantofi, la fel şi în aprilie, iar la fiecare două luni producția se dublează.

- **a)** Câte perechi de pantofi se fabrică până la sfârşitul anului (*începând cu luna martie*)?
- **b)** În ce lună/an producția va fi de 276480 de pantofi?

Problema 3

Fie $ABCD$ un paralelogram. Să se arate că pentru orice punct M din planul paralelogramului avem relația $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.

Problema 4

Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră $S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$.

a). Să se verifice că $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, $(\forall)n\in\mathbb{N}^*$.

b). Să se calculeze S_5.

c). Utilizând eventual metoda inducției matematice, să se arate că $S_n=\frac{n}{n+1}$, $(\forall)n\in\mathbb{N}^*$.

d). Să se găsească cel mai mare număr natural nenul n, cu proprietatea că $S_n<\frac{11}{12}$.

e). Să se găsească cel mai mic număr natural nenul n, cu proprietatea că $S_n>\frac{111}{112}$.

Notă

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN ILFOV

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa locală - 15.02.2014

Clasa a IX-a M_1

Soluţii şi bareme

1. $\left[\dfrac{4x+4}{4x-5}\right]=\dfrac{2x-1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{2x-1}{3}=t,\ t\in\mathbb{Z}\\ \left[\dfrac{4x+4}{4x-5}\right]-\dfrac{2x-1}{3}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3t+1}{2},\ t\in\mathbb{Z}\\ \left[\dfrac{6t+6}{6t-3}\right]-t=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{3t+1}{2},\ t\in\mathbb{Z}\\ \left[\dfrac{2t+2}{2t-1}-t\right]=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3t+1}{2},\ t\in\mathbb{Z}\\ 0\le \dfrac{2t+2}{2t-1}-t<1\end{cases}\Leftrightarrow$

….2p

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3t+1}{2},\ t\in\mathbb{Z}\\ 0\le\dfrac{-2t^2+3t+2}{2t-1}<1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3t+1}{2},\ t\in\mathbb{Z}\\ 0\le\dfrac{-2t^2+3t+2}{2t-1}\\ \dfrac{-2t^2+3t+2}{2t-1}<1\end{cases} \overset{t\in\mathbb{Z}}{\underset{2t-1\neq 0}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} x=\dfrac{3t+1}{2},\ t\in\mathbb{Z}\\ \left(-2t^2+3t+2\right)\left(2t-1\right)\ge 0\\ \dfrac{-2t^2+t+3}{2t-1}<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3t+1}{2},\ t\in\mathbb{Z}\\ \left(2t^2-3t-2\right)\left(2t-1\right)\le 0\\ \left(2t^2-t-3\right)\left(2t-1\right)>0\end{cases}\Leftrightarrow$

….2p

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3t+1}{2},\ t\in\mathbb{Z}\\ \left(2t+1\right)\left(t-2\right)\left(2t-1\right)\le 0\\ \left(2t-3\right)\left(t+1\right)\left(2t-1\right)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3t+1}{2},\ t\in\mathbb{Z}\\ t\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[\dfrac{1}{2},2\right]\\ t\in\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3}{2},\infty\right)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3t+1}{2},\ t\in\mathbb{Z}\\ t\in\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3}{2},2\right]\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=2\\ x=\dfrac{7}{2}\end{cases}.$

…..2p

$S=\left\{\dfrac{7}{2}\right\}.$

…..1p

2. a) $4x^3+4x^2-7x+2=\left(x+2\right)\left(2x-1\right)^2\ge 0,\left(\forall\right)x\in\left[-2,\infty\right).$ …..3p

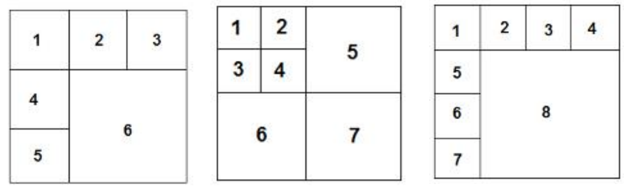
b) Dacă $a=b=c=-2\Rightarrow k\ge\dfrac{7}{4}$,dacă $a=b=c=\dfrac{1}{2}\Rightarrow k\le\dfrac{7}{4}$,deci singura valoare posibilă pentru k este $\dfrac{7}{4}$ …1p

Din **a**) rezultă $a^3+a^2+\dfrac{1}{2}\ge\dfrac{7}{4}a$, $b^3+b^2+\dfrac{1}{2}\ge\dfrac{7}{4}b$, $c^3+c^2+\dfrac{1}{2}\ge\dfrac{7}{4}c$, de unde prin sumare, rezultă …..2p

$a^3+b^3+c^3+a^2+b^2+c^2+\dfrac{3}{2}\ge\dfrac{7}{4}\left(a+b+c\right)$, deci $k=\dfrac{7}{4}$.

…..1p

3. Demonstrăm prin inducţie matematică. Facem verificarea pentru primele 3 valori ale lui *n* (*vezi figura aălturată*). …..1p



Apoi presupunem $P(k)$: "Pătratul poate fi împăţit în k pătrate" adevărată şi demonstrăm $P(k+3)$: "Pătratul poate fi împărţit în $k+3$ pătrate". …..2p

Pentru demonstraţie se observă că prin împărţirea unui pătrat din cele k în 4, obţinem $k+3$ pătrate. ……4p

4. a) Fie M mijlocul lui $[BC]$şi G centrul de greutate al triunghiului ABC. Construim BGCN paralelogram. Atunci vom avea:

(1) $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GN}$ (reg. paralelog.). Din BGCN paralelogram$\Rightarrow BC\cap GN=\{M\}$,mijlocul lui $[BC]$. ….1p

Dar A,G,M coliniare şi G,M,N coliniare , deci A,G,M,N coliniare. Avem următoarele relaţii vectoriale:

$\overrightarrow{GN}=2\overrightarrow{GM}$ şi $\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{GM}$ (G fiind centrul de greutate al $\triangle ABC$). ….1p

Introducând în relaţia **(1)**, obţinem: $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GN}=-\overrightarrow{GA}\Rightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Rightarrow$ 1p

$\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}\Rightarrow 3\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=-3\overrightarrow{GO}\Rightarrow$ 1p

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}\Rightarrow\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$ 1p

b) A,B,C pot fi vârfurile unui triunghi dacă şi numai dacă A,B,C necoliniare. …..1p

A,B,C coliniare$\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ a.î. $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow(a-1)\vec{i}+(b-1)\vec{j}=k\left(\vec{i}+\vec{j}\right)\Leftrightarrow a-1=b-1=k\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a=b(=k+1)$ Deci A,B,C sunt vârfurile unui triunghi dacă şi numai dacă $a\neq b$. 1p

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală - 15.02.2014

Clasa a IX-a M_2

Soluţii şi bareme

1. $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y},(\forall)a,b\in\mathbb{R}\ (\forall)x,y\in\mathbb{R}_+^*.$

$\Leftrightarrow \frac{a^2y+b^2x}{xy}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y}\Leftrightarrow (pt.ca\ x+y>0\ si\ \ xy>0)\ (a^2y+b^2x)(x+y)\geq(a+b)^2xy$ …. 3p

$\Leftrightarrow \cancel{a^2xy}+a^2y^2+b^2x^2+\cancel{b^2xy}\geq\cancel{a^2xy}+2abxy+\cancel{b^2xy}\Leftrightarrow a^2y^2-2abxy+b^2x^2\geq 0$

$\Leftrightarrow (ay-bx)^2\geq 0(\forall)a,b\in\mathbb{R};(\forall)x,y\in\mathbb{R}_+^*$ (pătratul oricărui număr real este pozitiv) ……4p

2.a) Până la sfârşitul anului sunt 10 luni, iar producţia se va dubla de $10:2=5$ ori. Deci se vor fabrica $540\left(2+2^2+2^3+2^4+2^5\right)=540\cdot 2\cdot\frac{2^5-1}{2-1}=33480$ perechi de pantofi. …..3p

b) $276840:2=138240$ perechi de pantofi, de unde $540\cdot 2^n=138240\Leftrightarrow 2^n=138240:540\Leftrightarrow 2^n=256\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow n=8$, deci după 8 grupe de câte 2 luni, adică 16 luni (1 an şi 4 luni), în iulie 2014 se va obţine producţia de 276480 pantofi. …..4p

3. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\Leftrightarrow\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}$ adevărat, deoarece ABCD paralelogram ……7p

4. a) $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1-n}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}(\forall)n\in\mathbb{N}^*$ ….1p

b) $S_5=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{5\cdot 6}\overset{a)}{=}\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}+...+\cancel{\frac{1}{5}}-\frac{1}{6}=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}.$ …. 1p

c) $S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n\cdot(n+1)}\overset{a)}{=}\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}+...+\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1},(\forall)n\in\mathbb{N}^*$ ….1p

d) $S_n<\frac{11}{12}\Leftrightarrow\frac{n}{n+1}<\frac{11}{12}\overset{n\in\mathbb{N}^*}{\Leftrightarrow}12n<11n+11\Leftrightarrow n<11\ si\ \ n\in\mathbb{N}^*,n$ maxim $\Rightarrow n=10.$ …..2p

e) $S_n>\frac{111}{112}\Leftrightarrow\frac{n}{n+1}>\frac{111}{112}\overset{n\in\mathbb{N}^*}{\Leftrightarrow}112n>111n+111\Leftrightarrow n>111\ si\ \ n\in\mathbb{N}^*,n$ minim $\Rightarrow n=112$. ..…2p