

Olimpiada Națională de Matematică**Etapa locală - 15.02.2014****Clasa a X-a M₁****Problema 1**

Stabiliți valoarea de adevăr a următoarei propoziții: “Există numere iraționale care ridicate la puterea număr irațional să dea număr rațional”.

Problema 2

Fie $\varepsilon = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ și $z \in \mathbb{C}$. Demonstrați că $(z-1)^2 + (z-\varepsilon)^2 + (z-\bar{\varepsilon})^2 = 3z^2$.

Problema 3

Să se demonstreze că dacă $a, b, c \in (0, \infty)$, atunci $\lg^2\left(\frac{ab}{c}\right) + \lg^2\left(\frac{bc}{a}\right) + \lg^2\left(\frac{ca}{b}\right) \geq \lg \frac{abc}{\sqrt[4]{1000}}$.

Problema 4

Să se determine $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 2\sqrt{2}$.

Notă

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică**Etapa locală - 15.02.2014****Clasa a X-a M₂****Problema 1**

Aflați $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât $\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}} = a + b\sqrt{5}$.

Problema 2

Arătați că expresia $E = \frac{\log_2 x^2 + \log_2 x^3 + \dots + \log_2 x^{2014}}{\log_7 x^3 + \log_7 x^4 + \dots + \log_7 x^{2015}}$ este independentă de x , pentru orice $x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$.

Problema 3

Să se determine suma valorilor lui $x \in \mathbb{Z}$ pentru care are sens expresia $E(x) = \log_{x^2-3x+2}(16-x^2)$.

Problema 4

Să se rezolve în \mathbb{C} ecuația $z + |z| = 8 + 4i$.

Notă

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală - 15.02.2014

Clasa a X-a M₁

Soluții și bareme

1) Afirmația este adevărată.1p

Exemplu: $a = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ și $b = \sqrt{2}$2p

Dacă $a \in \mathbb{Q}$, atunci acesta este exemplul de număr irațional: $\sqrt{2}$, care ridicat la numărul irațional $\sqrt{2}$ dă număr rațional.1p

Dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $a^{\sqrt{2}} = \left[(\sqrt{2})^{\sqrt{2}} \right]^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2 \in \mathbb{Q}$, deci $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ și $a^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$3p

2) $v = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ este una dintre rădăcinile complexe nereale ale unității.1p

Aceasta verifică ecuațiile: $z^3 = 1$ și $z^2 + z + 1 = 0$,1p

iar $\bar{v} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = v^2$ este cea de-a doua rădăcină complexă nereală a celor două ecuații.1p

Deci $v^2 + v + 1 = 0$, $v^3 = 1$, $v^4 = v$. Atunci vom avea:1p

$$\begin{aligned} (z-1)^2 + (z-v)^2 + (z-\bar{v})^2 &= z^2 - 2z + 1 + z^2 - 2v + v^2 + z^2 - 2\bar{v} + \bar{v}^2 = z^2 - 2z + 1 + z^2 - 2v + v^2 + z^2 - 2\bar{v} + \bar{v}^2 = \\ &= 3z^2 - 2z \underbrace{(v^2 + v + 1)}_0 + \underbrace{(v^2 + v + 1)}_0 = 3z^2 \end{aligned} \quad \dots\dots 3p$$

3) Facem următoarele notații:

$$\lg a = x, \lg b = y, \lg c = z$$

$$\text{Atunci: } \lg^2 \left(\frac{ab}{c} \right) + \lg^2 \left(\frac{bc}{a} \right) + \lg^2 \left(\frac{ca}{b} \right) = (\lg a + \lg b - \lg c)^2 + (\lg b + \lg c - \lg a)^2 + (\lg c + \lg a - \lg b)^2 =$$

$$= (x + y - z)^2 + (y + z - x)^2 + (z + x - y)^2 \quad \dots\dots 2p$$

$$\lg \frac{abc}{\sqrt[4]{1000}} = \lg a + \lg b + \lg c - \frac{3}{4} = x + y + z - \frac{3}{4} \quad \dots 1p$$

Inegalitatea din enunț devine :

$$(x + y - z)^2 + (y + z - x)^2 + (z + x - y)^2 \geq x + y + z - \frac{3}{4} \Leftrightarrow \quad \dots 1p$$

$$3(x^2 + y^2 + z^2) + \cancel{2xy} - \cancel{2xz} - \cancel{2yz} + \cancel{2yz} - \cancel{2xy} - 2xz + \cancel{2xz} - 2xy - 2yz \geq x + y + z - \frac{3}{4} \Leftrightarrow \quad \dots 1p$$

$$(x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 + x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z + \frac{3}{4} \geq 0 \Leftrightarrow \quad \dots 1p$$

$$(x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \quad \dots 1p$$

Cum suma pătratelor unor numere reale este pozitivă, oricare ar fi numerele respective, ultima afirmație este adevărată.

4) Aplicăm inegalitatea mediilor pentru numerele reale pozitive: $2^{\sin^2 x}, 2^{\cos^2 x}$:1p

$$\frac{2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x}}{2} \geq \sqrt{2^{\sin^2 x} \cdot 2^{\cos^2 x}} = \sqrt{2^{\sin^2 x + \cos^2 x}} = \sqrt{2} \quad \dots 2p$$

Dar conform ecuației din enunț, rezultă că mediile sunt egale, egalitatea având loc dacă și numai dacă numerele sunt egale. Deci:1p

$$2^{\sin^2 x} = 2^{\cos^2 x} \Rightarrow \sin^2 x = \cos^2 x$$

$$\text{dar pentru } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \sin x > 0, \cos x > 0 \Rightarrow \sin x = \cos x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}. \quad \dots 3p$$

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală - 15.02.2014

Clasa a X-a M₂

Soluții și bareme

1. Prin ridicare la puterea a 3-a, obținem $38 + 17\sqrt{5} = (a + b\sqrt{5})^3 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 38 + 17\sqrt{5} = a^3 + 3a^2b\sqrt{5} + 15ab^2 + 5b^3\sqrt{5} \Leftrightarrow 38 + 17\sqrt{5} = \underbrace{(a^3 + 15ab^2)}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{(3a^2b + 5b^3)}_{\in \mathbb{Z}}\sqrt{5} \Leftrightarrow$ 3p
- $\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 + 15ab^2 = 38 \\ 3a^2b + 5b^3 = 17 \end{cases}$ (altfel, am ajunge la contradicția $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$), de unde1p
- $\begin{cases} a(a^2 + 15b^2) = 38 \\ b(3a^2 + 5b^2) = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a, b > 0 \\ b | 17 \\ b \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 2 \end{cases}$ 3p
2. $E = \frac{\log_2 x^2 + \log_2 x^3 + \dots + \log_2 x^{2014}}{\log_7 x^3 + \log_7 x^4 + \dots + \log_7 x^{2014}} = \frac{2\log_2 x + 3\log_2 x + \dots + 2014\log_2 x}{3\log_7 x + 4\log_7 x + \dots + 2014\log_7 x} = \frac{\log_2 x(2+3+\dots+2014)}{\log_7 x(3+4+\dots+2015)} =$ 3p
- $= \frac{\log_2 x \cdot \frac{(2+2014) \cdot 2013}{2}}{\log_7 x \cdot \frac{(3+2015) \cdot 2013}{2}} = \frac{1008 \cdot \log_2 x}{1009 \cdot \log_7 x} = \frac{1008 \cdot \frac{\lg x}{\lg 2}}{1009 \cdot \frac{\lg x}{\lg 7}} = \frac{1008 \cdot \lg 7}{1009 \cdot \lg 2}$,3p
- adică este independent de x , pentru orice $x \in (0,1) \cup (1,\infty)$1p
3. Condiții de existență : $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 > 0 \\ x^2 - 3x + 2 \neq 1 \\ 16 - x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty) \\ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \right\} \\ x \in (-4, 4) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-4, 1) \cup (2, 4) \setminus \left\{ \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}$ 5p
- i cum $x \in \mathbb{Z}$, obținem $x \in \{-3, -2, -1, 0, 3\}$,1p
- iar suma acestora este -31p
4. Fie $z = a + bi$, unde $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ 1p

Ecuația se rescrie: $a+bi+\sqrt{a^2+b^2}=8+4i \Leftrightarrow (a+\sqrt{a^2+b^2})+bi=8+4i \Leftrightarrow \begin{cases} a+\sqrt{a^2+b^2}=8 \\ b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=4 \\ \sqrt{a^2+16}=8-a \end{cases}$ 3p

Se impune condiția de compatibilitate $8-a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 8 \Leftrightarrow a \in (-\infty, 8]$,1p

prin ridicare la pătrat obținem $a^2+16=64-16a+a^2 \Leftrightarrow 16a=48 \Leftrightarrow a=3$,2p

deci soluția ecuației este $z=3+4i$1p