Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală - 15.02.2014

Clasa a XII-a M_1

Problema 1

Să se determine primitivele funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.

Problema 2

a) Să se arate că $\int \cos\left(x^3+1\right)dx = x\cos\left(x^3+1\right)+3\int x^3\sin\left(x^3+1\right)dx,$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\int\left(4+9x^6\right)\cos\left(x^3+1\right)dx$, unde $x\in\mathbb{R}$.

Problema 3

Pe $\mathbb{Z}$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=xy-2x-2y+6$, $(\forall)x,y\in\mathbb{Z}$. Să se determine restul împărțirii lui $\underbrace{5*5*\ldots*5}_{\text{de 2014 ori}}$ la 3^{2014}.

Problema 4

Se consideră mulțimea $G=\left\{A_x=\begin{pmatrix}1 & 2x & 5x^2-2x\\ 0 & 1 & 5x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\middle|\, x\in\mathbb{R}\right\}\subset M_3(\mathbb{R})$.

a) Să se arate că $A_x\cdot A_y=A_{x+y}$, $(\forall)x,y\in\mathbb{R}$.

b) Să se arate că $(G,\cdot)$ formează o structură de grup.

c) Să se arate că $f:G\to\mathbb{R},\ f(A_x)=x$ este un izomorfism de la $(G,\cdot)$ la $(\mathbb{R},+)$.

Notă

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa locală - 15.02.2014

Clasa a XII-a M_2

Problema 1

Pe $\mathbb{R}$ definim legea de compoziţie asociativă, $x * y = 2xy - 6x - 6y + 21, (\forall) x, y \in \mathbb{R}$.

- **a)** Arătaţi că $x * y = 2(x-3)(y-3)+3, (\forall) x, y \in \mathbb{R}$.
- **b)** Calculaţi $1*2*\ldots*2014$.
- **c)** Există $a, b \in \mathbb{R} / \mathbb{Q}$ astfel încât $a * b \in \mathbb{N}$? *Justificaţi răspunsul*.

Problema 2

Să se calculeze integralele $I = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$ şi $J = \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$, unde $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Problema 3

Fie $f, F : (1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x-1}$, $F(x) = (ax+b)\sqrt{x-1}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Determinaţi $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât F este o primitivă pentru f.

Problema 4

Se consideră mulţimea $G = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{Z} \right\}$.

- **a)** Să se arate că $(G, \cdot)$ este grup.
- **b)** Arătaţi că $f : \mathbb{Z} \to G, f(x) = A(x)$ este un izomorfism de la $(\mathbb{Z}, +)$ la $(G, \cdot)$.

Notă

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa locală -15.02.2014

Clasa a XII-a M_1

Soluţii şi bareme

1. Funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$,deci admite primitive pe $\mathbb{R}$. Utilizăm formula de integrare prin părţi. ...1p

Cum $\left[\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\right]'=\frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}\cdot\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)'=\frac{-1}{\sqrt{\frac{4x^2}{\left(1+x^2\right)^2}}}\cdot\frac{-4x}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{\cancel{1+x^2}}{|x|}\cdot\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^{\cancel{2}}}=\frac{2x}{|x|\left(1+x^2\right)},\ (\forall)\, x\in\mathbb{R}^*,$ …1p

obţinem: $\int \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)dx=\int (x)'\cdot\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)dx=x\cdot\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)-\int\frac{2|x|}{1+x^2}dx,$ ……2p

Dacă F este o primitivă a lui f , atunci $(\exists)c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$ astfel încât

$$F(x)=\begin{cases} x\cdot\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)+\ln\left(1+x^2\right)+c_1,\ x<0\\ c_2,\ x=0\\ x\cdot\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)-\ln\left(1+x^2\right)+c_3, x>0\end{cases}$$ …….1p

Cum F este continuă, din condiţia $F(0-0)=F(0+0)=F(0)$, obţinem $c_1=c_2=c_3$, …….1p

$$\Rightarrow F(x)=c+\begin{cases} x\cdot\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)+\ln\left(1+x^2\right),\ x\le 0\\ x\cdot\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)-\ln\left(1+x^2\right)+c_3, x>0\end{cases},\ \text{unde } c\in\mathbb{R}.$$ …….1p

2. **a**) Utilizăm formula de integrare prin părţi, avem:

$$\int\cos\left(x^3+1\right)dx=\int(x)'\cos\left(x^3+1\right)dx=x\cos\left(x^3+1\right)+3\int x^3\sin\left(x^3+1\right)dx.$$ …….3p

b) Utilizând formula de integrare prin părţi, obţinem:

$I=\int 4\cos\left(x^3+1\right)dx=\int (4x)'\cos\left(x^3+1\right)dx=4x\cos\left(x^3+1\right)+12\int x^3\sin\left(x^3+1\right)dx=$ …….1p

$=4x\cos\left(x^3+1\right)+12\int\left(\frac{x^4}{4}\right)'\sin\left(x^3+1\right)dx=4x\cos\left(x^3+1\right)+12\frac{x^4}{4}\sin\left(x^3+1\right)-12\int\frac{x^4}{4}\cdot 3x^2\cos\left(x^3+1\right)dx=$ …….1p

$=4x\cos\left(x^3+1\right)+3x^4\sin\left(x^3+1\right)-\underbrace{\int 9x^6\cos\left(x^3+1\right)dx}_{J}$, $\Rightarrow$ ……1p

$\int\left(4+9x^6\right)\cos\left(x^3+1\right)dx=I+J==4x\cos\left(x^3+1\right)+3x^4\sin\left(x^3+1\right)+C.$ …..1p

3. $x*y=xy-2x-2y+6=xy-2x-2y+4+2=x(y-2)-2(y-2)+2=(x-2)(y-2)+2,(\forall)x,y\in\mathbb{Z}$ …….1p

$x*x=(x-2)^2+2,\ x*x*x=(x*x)*x=(x-2)^3+2,\ldots,\underbrace{x*x*\ldots*x}_{\text{de } n \text{ ori}}=(x-2)^n+2,(\forall)x\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N},n\geq 2.$ ……1p

Demonstrăm prin inducţie : Fie $x\in\mathbb{Z}$, $P(n):\underbrace{x*x*\ldots*x}_{\text{de } n \text{ ori}}=(x-2)^n+2,n\in\mathbb{N},n\geq 2$. $P(2)$este adevărat. …..1p

Presupunem $P(k)$ adevărat şi demonstrăm $P(k+1)$, unde $k\in\mathbb{N},k\geq 2$ arbitrar fixat.

$P(k+1):\underbrace{x*x*\ldots*x}_{\text{de } k+1 \text{ ori}}=\underbrace{(x*x*\ldots*x)}_{\text{de } k \text{ ori}}*x=\left[(x-2)^k+2-2\right](x-2)+2=(x-2)^{k+1}+2$, deci $P(k+1)$ adevărat.

Aşadar $P(n)$ adevărat $(\forall)n\in\mathbb{N},n\geq 2$. …….2p

Avem $\underbrace{5*5*\ldots*5}_{\text{de } 2014 \text{ ori}}=(5-2)^{2014}+2=3^{2014}+2$ şi restul împărţirii la 3^{2014} este 2. ……..2p

4. a) $A_x\cdot A_y=\begin{pmatrix}1 & 2x & 5x^2-2x\\ 0 & 1 & 5x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2y & 5y^2-2y\\ 0 & 1 & 5y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2y+2x & 5y^2-2y+10xy+5x^2-2x\\ 0 & 1 & 5y+5x\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}1 & 2(x+y) & 5(x+y)^2-2(x+y)\\ 0 & 1 & 5(x+y)\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=A_{x+y},\ (\forall)x,y\in\mathbb{R}.$ ……2p

b)Din a) $A_x\cdot A_y=A_{x+y}$, $x+y\in\mathbb{R}$, deci $A_x\cdot A_y\in G$, $(\forall)A_x,A_y\in G$, deci înmulţirea este lege pe G (1) ……0,5p

Observăm că $A_x=A_y\Leftrightarrow x=y$. Înmulţirea matricelor este asociativă pe $M_3(\mathbb{R}),G\subset M_3(\mathbb{R})$, deci şi pe G (2)….0,5p

$A_0=I_3\in G$, deci înmulţirea admite element neutru (3). …..0,5p

Pentru orice $x\in\mathbb{R}$, avem $A_x\cdot A_{-x}=A_{-x}\cdot A_x=A_0=I_3$, deci toate elementele sunt simetrizabile (4). ……0,5p

Din $(1),(2),(3),(4)$ rezultă $(G,\cdot)$ grup. …….0,5p

c) $f\left(A_x\cdot A_y\right)=f\left(A_{x+y}\right)=x+y=f\left(A_x\right)+f\left(A_y\right),(\forall)A_x,A_y\in G$, deci f morfism (A). …….1p

Fie $A_x,A_y\in G$ astfel încât $f\left(A_x\right)=f\left(A_y\right)\Rightarrow x=y\Rightarrow A_x=A_y\Rightarrow f$ injectivă $\left(B_1\right)$. ……..0,5p

Fie $y\in\mathbb{R}$, atunci $(\exists)A_y\in G$ astfel încât $f\left(A_y\right)=y$, deci f surjectivă $\left(B_2\right)$. ……...0,5p

Din $\left(B_1\right)$ şi $\left(B_2\right)$ rezultă f bijectivă (B). Din (A) şi (B) rezultă f izomorfism. ……..0,5p

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa locală - 15.02.2014

Clasa a XII-a M_2

Soluţii şi bareme

1. **a**) $2(x-3)(y-3)+3=2\left(x^2-3x-3y+9\right)+3=2xy-6x-6y+21=x*y,\ (\forall)\,x,y\in\mathbb{R}.$ ……..2p

b) Căutăm "*zeroul*" legii: $a\in\mathbb{R}$ pentru care $a*x=x*a=a,\ (\forall)\,x\in\mathbb{R}$.

$a*x=a\Leftrightarrow 2(a-3)(x-3)+3=a\Leftrightarrow 2(a-3)(x-3)-(a-3)=0\Leftrightarrow(a-3)\left[2(x-3)-1\right]=0,(\forall)x\in\mathbb{R}$, deci $a-3=0\Rightarrow a=3$, …..2p

verificăm $x*3=2(x-3)(3-3)+3=3,(\forall)\,x\in\mathbb{R}$, deci $3*x=x*3=3,\ (\forall)\,x\in\mathbb{R}$. …….1p

Avem $1*2*\ldots*2014 \overset{\text{"*" asociativã}}{=} (1*2)*3*(4*\ldots*2014)=3*(4*\ldots*2014)=3.$ …….1p

c) Răspunsul este afirmativ. Putem lua, spre exemplu, $a=3+\sqrt{3},\ b=3+2\sqrt{3}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$,

obţinem $a*b=2\left(3+\sqrt{3}-3\right)\left(3+2\sqrt{3}-3\right)+3=15\in\mathbb{N}.$ ……..1p

2. Avem $I+J=\int\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int dx=x+C$, respectiv …….2p

$-I+J=\int\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int\frac{(\sin x+\cos x)'}{\sin x+\cos x}dx=\ln\left|\sin x+\cos x\right|+C \overset{x\in\left(0,\frac{\text{®}}{2}\right)}{=} \ln(\sin x+\cos x)+C$ …….2p

$I=\frac{1}{2}\left[(I+J)-(-I+J)\right]=\frac{1}{2}\left[x-\ln(\sin x+\cos x)\right]+C$, iar ……1,5p

$J=\frac{1}{2}\left[(I+J)+(-I+J)\right]=\frac{1}{2}\left[x+\ln(\sin x+\cos x)\right]+C$ …...1,5p

3. F este primitivă pentru $f\Leftrightarrow F'(x)=f(x),(\forall)x\in(1,\infty)\Leftrightarrow\left[(ax+b)\sqrt{x-1}\right]'=\sqrt{x-1},(\forall)x\in(1,\infty)\Leftrightarrow$ ……2p

$a\sqrt{x-1}+(ax+b)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1}\Leftrightarrow 2a(x-1)+(ax+b)=2(x-1)\Leftrightarrow 3ax+(b-2a)=2x-2,(\forall)x\in(1,\infty)\Rightarrow$ ……3p

$$\begin{cases}3a=2\\ b-2a=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{2}{3}\\ b=-\dfrac{2}{3}\end{cases}.$$ …….2p

4. a) $A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & x+y\\ 0 & 1\end{pmatrix}=A(x+y)$ şi cum $x+y\in\mathbb{Z}$, rezultă $A(x)\cdot A(y)\in G$, deci înmulţirea este lege pe G (1). ……..1p

Înmulţirea matricelor este asociativă pe $M_2(\mathbb{R})$, $G\subset M_2(\mathbb{R})$, deci şi pe G (2). ……..1p

$A(0)=I_2\in G$, deci înmulţirea admite element neutru (3). …….1p

$(\forall)$ $x\in\mathbb{Z}$, avem $A(x)\cdot A(-x)=A(-x)\cdot A(x)=A(0)=I_2$, deci toate elementele sunt simetrizabile (4). ……1p

Din $(1),(2),(3),(4)$ rezultă $(G,\cdot)$ grup.

b) $f(x+y)=A(x+y)\overset{a)}{=}A(x)\cdot A(y)=f(x)\cdot f(y)$, $(\forall)x,y\in\mathbb{Z}$, deci f morfism (A). …….1p

Fie $x,y\in\mathbb{Z}$ astfel încât $f(x)=f(y)\Rightarrow A(x)=A(y)\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow x=y\Rightarrow f$ injectivă (B_1). ……1p

Fie $A(x)\in G$, atunci $x\in\mathbb{Z}$ astfel încât $f(x)=A(x)$, deci f surjectivă (B_2). …….1p

Din (B_1) şi (B_2) rezultă f bijectivă (B). Din (A) şi (B) rezultă f izomorfism.