MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREŞTI

ŞCOALA GIMNAZIALA nr. 56 – BUCUREŞTI

Concursul Interjudeţean de Matematică al Şcolii Gimnaziale nr. 56
Ediţia a XIII - a, 25.01.2014

Clasa a VI-a

1. Se consideră numerele $a = 2^3 \cdot 6^3 \cdot 49 \cdot 243$ şi $b = 8^3 \cdot 35^2 \cdot 81$. Demonstraţi că cel mai mare divizor comun al numerelor *a* şi *b* este pătrat perfect.

2. Demonstraţi că există o infinitate de numere naturale *n* pentru care numerele $6n+3$ şi $4n+1$ sunt numere naturale prime între ele.

3. Determinaţi numerele naturale diferite $\overline{abc}$ şi $\overline{def}$, $a \cdot d \neq 0$, ştiind că există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $\overline{abcdef} = n \cdot \overline{defabc}$.

4. Se consideră dreapta A_0B_0 şi $O \in \left(A_0B_0\right)$. De aceeaşi parte a dreptei A_0B_0 se consideră, în acelaşi sens, unghiurile $\widehat{A_0OA_1}$, $\widehat{A_1OA_2}$, ..., $\widehat{A_{n-1}OA_n}$, astfel încât $m\left(\widehat{A_{i-1}OA_i}\right) = i^\circ$, pentru oricare $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

a) Determinaţi valoarea maximă a lui *n*;

b) Pentru $n = 18$, determinaţi numărul de unghiuri drepte $\widehat{A_iOA_j}$, unde $i, j \in \{1, 2, ..., 18\}$.

SUCCES!

Notă:
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.
- Timp de lucru efectiv : 2 ore.

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREŞTI

ŞCOALA GIMNAZIALA nr. 56 – BUCUREŞTI

Concursul Interjudeţean de Matematică al Şcolii gimnaziale nr. 56
Ediţia a XIII - a, 25.01.2014

Soluţii şi bareme clasa a VI – a

1.	Avem $a=2^6\cdot 3^8\cdot 7^2$ şi $b=2^9\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 3^4$	**4p**
	Deci $(a,b)=2^6\cdot 3^4\cdot 7^2=\left(2^3\cdot 3^2\cdot 7\right)^2$	**3p**
2.	Dacă d este un divizor comun al numerelor, atunci $d\,\vert\, 6n+3$ şi $d\,\vert\, 4n+1$	**2p**
	Rezultă că $d\,\vert\, 3$.	**3p**
	E suficient ca 3 să nu dividă pe $4n+1$. Prin urmare, putem considera $n\in\left\{3k \,\middle\vert\, k\in\mathbb{N}^*\right\}$ sau $n\in\left\{3k+1 \,\middle\vert\, k\in\mathbb{N}\right\}$	**2p**
3.	Evident, $1<n<10$. Avem $1000\cdot\overline{abc}+\overline{def}=1000n\cdot\overline{def}+n\cdot\overline{abc}$, sau	**1p**
	$\dfrac{\overline{def}}{\overline{abc}}=\dfrac{1000-n}{1000n-1}$. Deoarece $1000n-1$ este număr de patru cifre, fracţia $\dfrac{1000-n}{1000n-1}$ trebuie să se simplifice cu un număr d cel mult egal cu 9.	**2p**
	Dacă d este un divizor comun al numerelor, atunci $d\,\vert\, 999999$. Deducem că $d\in\{3,7,9\}$.	**1p**
	Pentru $n=6$, obţinem $\dfrac{\overline{def}}{\overline{abc}}=\dfrac{994}{5999}$ care se simplifică cu 7 şi avem $\dfrac{\overline{def}}{\overline{abc}}=\dfrac{142}{857}$. Deoarece nu mai putem simplifica, avem $\overline{abc}=857$ şi $\overline{def}=142$	**3p**
4.	**a)** Avem $1+2+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}\le 180$, de unde obţinem $n=18$.	**2p**
	b) Trebuie $k+(k+1)+...+(k+p-1)=90$, $k+p\le 18$, adică $p(2k+p-1)=180$. Deducem că $p\in\{1,2,3,4,5,6,9,10,12,15\}$	**3p**
	Convin numai $p=9,k=6$ şi $p=12,k=2$, deci $m\left(\widehat{A_5OA_{13}}\right)=90^\circ$ şi $m\left(\widehat{A_1OA_{12}}\right)=90^\circ$	**2p**